Freie Universität Berlin

Freie Gruppen und der Satz von Nielsen-Schreier

Bachelorarbeit

an der

Freien Universität Berlin

Fachbereich Mathematik und Informatik

Studiengang Mathematik

vorgelegt von

Maximilian Wötzel

September 2012

Gutachter: Prof. Dr. Alexander Schmitt

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die freien Gruppen tauchten das erste Mal im 19. Jahrhundert im Zuge der Untersuchung hyperbolischer Geometrie als Beispiel für Fuchssche Gruppen auf, Gruppen die aus orientierungserhaltenden Isometrien der oberen komplexen Halbebene bestehen. Die algebraische Untersuchung von freien Gruppen wurde zu Beginn der 1920er Jahre von Jakob Nielsen (1890-1959) eingeleitet, welcher ihnen auch ihren Namen gab und viele ihrer grundlegenden Eigenschaften bewies. Der Satz von Nielsen-Schreier, nach ihm und Otto Schreier (1901-1929) benannt, welcher besagt, dass Untergruppen von freien Gruppen wieder frei sind, wurde zuerst von Nielsen im Jahr 1921 in eingeschränkter Form aufgestellt: Er forderte zusätzlich, dass die freie Gruppe endlich erzeugt sein muss. Fünf Jahre später bewies Schreier dann die allgemeine Variante des Satzes in seiner Habilitationsschrift *Die Untergruppen der freien Gruppe*. Der Satz selbst war das nicht-abelsche Gegenstück zu einem älteren Ergebnis von Richard Dedekind (1831-1916), welches besagte, dass jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe wieder frei abelsch ist. Im Zuge dieser Arbeit werde ich die freien Gruppen, sowie das Konzept von Präsentationen von Gruppen zuerst definieren und diverse Beispiele geben und im Anschluss einige wichtige Eigenschaften beweisen. Der zweite Teil der Arbeit widmet sich dem Satz von Nielsen-Schreier: Ich werde dabei auf einen Beweis der algebraischen Topologie, welcher die Idee von Gruppenwirkungen auf Bäume ausnutzt, zurückgreifen. Die Arbeit wird sich hauptsächlich an den Aufbau und die Terminologie von Kapitel 27 und 28 in M. A. Armstrongs *Groups and Symmetry* ([1]) halten. Dieser verwendete Beweis ist jedoch bei weitem nicht der einzige für den Satz von Nielsen-Schreier. Ein anderer topologischer Beweis, welcher 1936 von Reinhold Baer (1902-1979) und Friedrich Levi (1888-1966) in [2] veröffentlicht wurde, nutzt aus, dass eine freie Gruppe G auf einer Menge von Erzeugern die Fundamentalgruppe einer *Rose* (ein topologischer Graph mit einem einzigen Knoten und einer Kante für jeden Erzeuger) ist. Jede Untergruppe H der Fundamentalgruppe ist selbst eine Fundamentalgruppe einer Überlagerung der Rose, ein sogenannter Schreier Graph, welcher genau einen Knoten für jede Nebenklasse der Untergruppe hat. Es gilt, dass es in jedem topologischen Graphen möglich ist, die Kanten zu einem Spannbaum des Graphen zu reduzieren, was wieder eine Rose ergibt, welche dieselbe Fundamentalgruppe H besitzt. H ist also selbst eine Fundamentalgruppe einer Rose und deshalb frei. Neben diesen topologischen Beweisen existieren auch noch rein algebraische, welche jedoch grundsätzlich nicht die Eleganz der topologischen haben. Eine Gemeinsamkeit, die all diese Beweise haben ist jedoch, dass sie in der einen oder anderen Form das Auswahlaxiom verwenden. Deshalb gilt, wie Läuchli in [3] zeigt, dass Modelle der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre existieren, in welcher sowohl das Auswahlaxiom, als auch der Satz von Nielsen-Schreier falsch sind. In dieser Arbeit wird das Auswahlaxiom in der Form des Lemmas von Zorn auftreten, und ich werde zu diesem Zeitpunkt noch einmal einige der Probleme ansprechen, die mit der Benutzung verbunden sind.

2 Freie Gruppen und Präsentationen

Im ersten Teil dieser Arbeit werde ich die Begriffe der *freien Gruppe* und *Präsentation* definieren, um im Anschluss dann auf einen Beweis vom Satz von Nielsen-Schreier hinzuarbeiten. Zuerst soll aber die Motivation hinter einer Präsentation einer Gruppe gezeigt werden: Es ist oft hilfreich, Gruppen durch eine Erzeugermenge und eine Menge von Relationen beschreiben zu können. Hierzu ein Beispiel.

Beispiel 2.0.1:

Betrachte die Diedergruppe D_n. Sie wird bestimmt durch zwei Erzeuger r und s, welche die Relationen

$$r^n = e,\ s^2 = e,\ sr = r^{-1}s$$

oder äquivalent

$$r^n = s^2 = (rs)^2 = e$$

erfüllen. Mit diesen Relationen können alle Elemente der Gruppe eindeutig in der Form $r^i s^j$ mit $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $j \in \{0, 1\}$ und die Verknüpfungstabelle vollständig bestimmt werden.

Um dies zu verallgemeinern soll nun die Idee einer freien Gruppe eingeführt werden.

2.1 Freie Gruppen und Wörter

Definition 2.1.1:

Sei G Gruppe, $X \subset G$.

1. X heißt ***freie Erzeugermenge von G*** $\iff$ Jedes $g \in G \setminus \{e\}$ kann *eindeutig* ausgedrückt werden als Produkt

$$g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$$

von endlicher Länge, wobei $x_i \in X, n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\, \forall i \in [k]$ und $x_i \neq x_{i+1}\, \forall i \in [k-1]$. Diese Erzeugermenge wird als frei bezeichnet, da durch die Eindeutigkeit keine Relationen zwischen den Elementen von X vorhanden sein können.

2. G heißt ***freie Gruppe*** $\iff$ G hat eine freie Erzeugermenge.

Das erste Ziel wird nun sein, für eine gegebene nichtleere Menge X eine Gruppe zu konstruieren, die X als freie Erzeugermenge hat. Hierzu benötigt man noch weitere Definitionen.

Definition 2.1.2:

Sei X eine nichtleere Menge.

1. Ein endliches Produkt
$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_s^{m_s}$$
mit $x_i \in X, m_i \in \mathbb{Z} \,\forall i \in [s]$ heißt ***Wort*** im Alphabet X.
2. Falls gilt, dass $x_i \neq x_{i+1} \,\forall i \in [s-1]$ und $m_i \neq 0 \,\forall i \in [s]$ bezeichnet man dieses Wort als ***reduziert***.
3. Reduziert man x_1^0, so erhält man ein Wort ohne Symbole. Man bezeichnet dies als das ***leere Wort***.

Jedes Wort kann zu einem reduzierten Wort vereinfacht werden, indem man Potenzen von zwei gleichen, benachbarten Elementen sammelt und Nullpotenzen weglässt. Diesen Prozess wiederholt man gegebenenfalls mehrmals. Hierzu ein Beispiel.

Beispiel 2.1.3:

Betrachte $X = \{x, y, z\}$ und das Wort
$$w = x^{-3}x^2y^5y^{-5}x^7z^2z^{-2}x^{-1}xzy^2x^{-1}.$$
Dann
$$\begin{aligned} w &= x^{-1}y^0x^7z^0x^0zy^2x^{-1} \\ &= x^{-1}x^7zy^2x^{-1} \\ &= x^6zy^2x^{-1} \end{aligned}$$
was nun reduziert ist. Man beachte, dass die Elemente von X nicht miteinander kommutieren. Es ist jedoch möglich den Reduktionsprozess auf mehr als eine Art durchzuführen, z.B.
$$\begin{aligned} w &= (x^{-3}x^2y^5y^{-5}x^7z^2)(z^{-2}x^{-1}xzy^2x^{-1}) \\ &= (x^{-1}y^0x^7z^2)(z^{-2}x^0zy^2x^{-1}) \\ &= (x^{-1}x^7z^2)(z^{-2}zy^2x^{-1}) \\ &= (x^6z^2)(z^{-1}y^2x^{-1}) \\ &= x^6z^2z^{-1}y^2x^{-1} \\ &= x^6zy^2x^{-1}. \end{aligned}$$
Dies führt zum ersten Satz.

Satz 2.1.4:

Jedes Wort w kann nur zu genau einem reduzierten Wort $\overline{w}$ vereinfacht werden.

Bevor ich zum Beweis dieses Satzes komme, soll zuerst eine wichtige Folgerung präsentiert werden.

Folgerung 2.1.5:

Die Menge der reduzierten Wörter zusammen mit dem Produkt $\overline{w_1 w_2}$ bilden eine Gruppe.

Beweis:

Zwei Wörter w_1 und w_2 kann man multiplizieren, indem man sie hintereinander schreibt. Jedoch könnte das letzte Symbol von w_1 und das erste von w_2 identisch sein, weshalb man als Produkt $\overline{w_1 w_2}$ verwendet, womit die Produktbildung offenbar auf den reduzierten Wörtern abgeschlossen ist. Dies ist assoziativ, da sowohl $\overline{(\overline{w_1 w_2})w_3}$ als auch $\overline{w_1(\overline{w_2 w_3})}$ unterschiedliche Reduktionen des Wortes $w_1 w_2 w_3$ sind, was nach Satz 5 das eindeutig zugehörige reduzierte Wort $\overline{w_1 w_2 w_3}$ hat. Das neutrale Element ist das *leere Wort*. Das Inverse zu einem reduzierten Wort

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k} \text{ ist } x_k^{-n_k} \dots x_2^{-n_2} x_1^{-n_1}$$

was offenbar auch reduziert ist. ■

Diese Gruppe reduzierter Wörter aus dem Alphabet X nennt ***man die von X erzeugte freie Gruppe***, man schreibt $F(X)$. Kommen wir nun zum Beweis des Satzes.

Beweis (Satz 2.1.4):

Für jedes $x \in X$ definieren wir eine Permutation φ_x der reduzierten Wörter durch die Formel

$$\varphi_x(w) = \overline{xw}$$

wobei w ein *reduziertes* Wort ist. $\overline{xw}$ ist wohldefiniert, da w reduziert ist.

Sei

$$u = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_s^{m_s}$$

ein beliebiges Wort, dann haben wir eine zugehörige zusammengesetzte Permutation

$$\varphi_u = (\varphi_{x_1})^{m_1} (\varphi_{x_2})^{m_2} \dots (\varphi_{x_s})^{m_s}.$$

Nun bilden die Permutationen der reduzierten Wörter eine *Gruppe* unter Komposition von Permutationen und deshalb gilt, dass wenn u, w Wörter sind, und u auf irgendeine Weise zu w reduziert werden kann, $\varphi_u = \varphi_w$ gelten muss. Man nehme nun an, dass das Wort u auf zwei unterschiedliche Weisen zu reduzierten Wörtern w und v vereinfacht werden kann. Dann gilt $\varphi_u = \varphi_w = \varphi_v$. Aber φ_v schickt das leere Wort auf v, und φ_w auf w, also muss $v = w$ gelten. ■

Bemerkung 2.1.6:

1. Sei $X = \{x\}$, dann ist $F(X)$ unendlich zyklisch, die einzigen reduzierten Wörter sind die Potenzen x^n, $n \geq 1$, sowie das leere Wort.

2. Sei $|X| \geq 2$. Dann ist $F(X)$ eine nicht-abelsche Gruppe mit $ord(w) = \infty \, \forall w \in F(X) \setminus \{\text{leeres Wort}\}$.
3. Eine Bijektion $\varphi : X \to Y$ induziert einen Isomorphimus zwischen $F(X)$ und $F(Y)$. Das reduzierte Wort
$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$
aus $F(X)$ wird abgebildet auf das reduzierte Wort
$$\varphi(x_1)^{n_1} \varphi(x_2)^{n_2} \dots \varphi(x_k)^{n_k}$$
aus $F(Y)$. Sei F_n "die" Gruppe, die frei von n Elementen erzeugt wird.

Bevor ich zum nächsten Satz komme, will ich noch einmal an ein Verfahren, nämlich das "abelsch machen" von Gruppen, erinnern.

Bemerkung 2.1.7:

Sei G Gruppe. $[G, G] = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y, x^{-1}y^{-1} \in G\} \rangle$ bezeichnet die Kommutatorgruppe von G.

Dann gilt
$$G/[G, G]$$
ist abelsch.

Beweis:

Betrachte für $x, y, x^{-1}, y^{-1} \in G$
$$\begin{aligned} & x[G,G] \cdot y[G,G] \cdot (x[G,G])^{-1} \cdot (y[G,G])^{-1} \\ = \; & xyx^{-1}y^{-1}[G,G] \\ = \; & [G,G]. \blacksquare \end{aligned}$$

Satz 2.1.8:

Abelsch machen von F_n ergibt $\mathbb{Z}^n$.

Beweis:

Sei $\{z_1, \dots, z_n\}$ eine freie Erzeugermenge von F_n. Nach Bemerkung 8 folgt, dass $F_n/[F_n, F_n]$ abelsch ist und erzeugt wird von den Nebenklassen $z_k[F_n, F_n]$, $1 \leq k \leq n$. Durch Sammeln der Potenzen jedes Erzeugers kann nun jedes Element dieser Gruppen eindeutig geschrieben werden in der Form
$$z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_n^{r_n} [F_n, F_n].$$
Die Abbildung
$$z_1^{r_1} z_2^{r_2} \dots z_n^{r_n} \mapsto (r_1, r_2, \dots, r_n)$$
liefert nun den gesuchten Isomorphismus zwischen $F_n/[F_n, F_n]$ und $\mathbb{Z}^n$. $\blacksquare$

Satz 2.1.9:

$$F_m \cong F_n \implies m = n.$$

Beweis:

Für zwei Gruppen G, H gilt, dass ein Isomorphismus $\varphi : G \to H$ $[G, G]$ auf $[H, H]$ schickt, da jeder Kommutator $xyx^{-1}y^{-1}$ aus G abgebildet wird auf einen Kommutator $\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1}$ aus H. Somit induziert φ einen Isomorphismus $G/[G, G] \to H/[H, H]$.

$\implies \mathbb{Z}^n \cong F_n/[F_n, F_n] \cong F_m/[F_m, F_m] \cong \mathbb{Z}^m \implies m = n.$ ■

Bemerkung 2.1.10:

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein surjektiver Homomorphismus $\varphi : F_n \to F_m$ genau dann, wenn $m \leq n$ gilt.

Beweis:

" $\Longleftarrow$ " :

Sei $m \leq n$. Dann kann direkt ein surjektiver Homomorphismus $\varphi : F_n \to F_m$ angegeben werden. Man beginnt mit den Erzeugern

$$\begin{aligned} z_1 &\mapsto z_1 \\ &\vdots \\ z_{m-1} &\mapsto z_{m-1} \\ z_j &\mapsto z_m \qquad \forall j \geq m \end{aligned}$$

und bildet weiterhin das leere Wort in F_n auf das in F_m ab. Alle weiteren Abbildungsvorschriften sind dann durch die Homomorphismuseigenschaft $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) \, \forall g_1, g_2 \in F_n$ gegeben.

" $\Longrightarrow$ " :

Betrachtet man die Kontraposition, ist dies eigentlich sofort ersichtlich: Sei $m > n$. Damit die Produkte erhalten werden, müssten Erzeuger aufeinander abgebildet werden. Offenbar hat F_n aber echt weniger Erzeuger als F_m, es bleiben also Erzeuger übrig, was die Surjektivität verhindert. ■

Man kann freie Gruppen wie folgt *charakterisieren*.

Satz 2.1.11:

Sei G Gruppe und $X \subset G$. Dann gilt:

X ist eine freie Erzeugermenge von $G \iff \forall H$ Gruppe, $f : X \to H$ Funktion $\exists! \varphi : G \to H$ Homomorphismus mit $\varphi(x) = f(x) \, \forall x \in X$.

Beweis:

" $\Longrightarrow$ " :

Angenommen X ist eine freie Erzeugermenge von G. Dann kann nach Definition jedes Element aus $G \setminus \{e\}$ eindeutig als reduziertes Wort im Alphabet X geschrieben werden. Mit einer gegebenen Gruppe H und einer Funktion $f : X \to H$ gibt es nur *einen Weg*, f zu einem Homomorphismus von ganz G nach H fortzusetzen und zwar, indem man jedes reduzierte Wort

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

auf

$$[f(x_1)]^{n_1} [f(x_2)]^{n_2} \dots [f(x_k)]^{n_k},$$

und die Identität in G auf die in H schickt.

" $\Longleftarrow$ " :

Wir nehmen nun an, dass für eine gegebene Gruppe H, zusammen mit einer Funktion von X nach H, immer eine eindeutige Fortsetzung dieser Funktion zu einem Homomorphismus von ganz G nach H gefunden werden kann. Sei $\pi : F(X) \to G$ der Homomorphismus, welcher jedes reduzierte Wort $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_k^{r_k}$ aus $F(X)$ auf das korrespondierende Produkt von Elementen in G schickt. Wir werden zeigen, dass π ein *Isomorphismus* ist. Dann gilt sicherlich, dass X eine freie Erzeugermenge von G ist. Betrachte $H = F(X)$. Die Inklusion $X \hookrightarrow F(X)$ kann zu einem Homomorphimus $\varphi : G \to F(X)$ erweitert werden. Offenbar gilt, dass $\varphi\pi = id_{F(X)}$, da φ auf X die Identität ist. Außerdem sind sowohl $\pi\varphi : G \to G$, als auch $id_G : G \to G$ Homomorphismen, welche die Inklusion $X \hookrightarrow G$ auf ganz G fortsetzen. Nach Voraussetzung gibt es aber genau *eine* solche Fortsetzung, also muss $\pi\varphi = id_G$ gelten. Dies bedeutet, dass π ein Isomorphismus ist. ■

2.2 Präsentationen von Gruppen

Nun, da die Definition der freien Gruppen gegeben ist, kann diese verwendet werden, um beliebige Gruppen durch zwei Mengen zu repräsentieren.

Bemerkung 2.2.1:

Sei G Gruppe, X Erzeugermenge von G. Sei $\pi : F(X) \to G$ wieder der natürliche Homomorphismus, welcher jedes reduzierte Wort

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

auf sein korrespondierendes Produkt von Gruppenelementen aus G schickt. Sei $Ker\pi = N$. Dann gilt:

- π ist surjektiv, da X Erzeugermenge von G ist.

- $F(X)/N \cong G$, nach dem ersten Isomorphiesatz.

Dies bedeutet: *Jede Gruppe ist Faktorgruppe einer freien Gruppe.*

Sei $R \subset F(X)$ eine Sammlung von reduzierten Wörtern im Alphabet X, die zusammen mit ihren Konjugierten N erzeugen. N ist also der kleinste Normalteiler von $F(X)$, der R enthält. Damit ist nun genau bestimmt, welche Elemente aus $F(X)$ durch π auf die Identität abgebildet werden oder äquivalent, welche Produkte von Elementen aus G die Identität in G sind. R heißt eine *Menge von definierenden Relationen für G.*

Beispiel 2.2.2:

Betrachte erneut $G = D_n$ und $X = \{r, s\}$. Dann gilt, dass die Wörter $r^n, s^2, (rs)^2$ eine Menge von definierenden Relationen für G bilden. Sei M der kleinste Normalteiler von $F(X)$, welcher diese drei Wörter enthält und nehme wieder N für den Kern des Homomorphismus $\pi : F(X) \to D_n$. Wir müssen nun zeigen, dass $M = N$. Sicherlich gilt, dass r^n, s^2 und $(rs)^2$ alle durch π auf die Identität geschickt werden, also gilt $M \subset N$ und nach dem dritten Isomorphiesatz folgt, dass wir einen surjektiven Homomorphismus $F(X)/M \to F(X)/N$ mit Kern N/M haben. Insbesondere gilt $|F(X)/M| \geq 2n$. Nun erzeugen die Nebenklassen rM, sM gerade die Faktorgruppe $F(X)/M$ und sie erfüllen

$$(rM)^n = M, \qquad (sM)^2 = M, \qquad (rsM)^2 = M$$

oder äquivalent

$$(rM)^n = M, \qquad (sM)^2 = M, \qquad srM = r^{n-1}sM,$$

da r^n, s^2 und $(rs)^2$ alle in M enthalten sind. Mit diesen Gleichungen ist es nun leicht zu zeigen, dass die Nebenklassen

$$M, rM, \ldots, r^{n-1}M, sM, rsM, \ldots r^{n-1}sM$$

eine *Untergruppe* von $F(X)/M$ bilden. Diese Untergruppe enthält rM und sM, also muss es die ganze Gruppe $F(X)/M$ sein. Daraus folgt wiederum, dass $|F(X)/M| \leq 2n$. Also muss $|F(X)/M| = 2n$ und damit $M = N$ gelten.

Definition 2.2.3:

1. Sei X eine nichtleere Menge, R eine Sammlung von Wörtern im Alphabet X. Die durch die ***Erzeugermenge*** X und die ***definierenden Relationen*** R bestimmte Gruppe wird definiert als Faktorgruppe $F(X)/N$, wobei N der kleinste Normalteiler von $F(X)$ mit $R \subset N$ ist.
2. Sei G eine Gruppe mit $G \cong F(X)/N$. Dann wird das Paar X, R ***Präsentation*** von G genannt. Insbesondere sagt man: Wenn X endlich

mit $X = \{x_1, \ldots, x_s\}$ und R endlich mit $R = \{w_1, \ldots, w_t\}$, dann ist G ***endlich präsentiert*** und schreibt:

$$G \equiv \{x_1, \ldots, x_s \mid w_1, \ldots, w_t\}.$$

Beispiel 2.2.4:

1. $\mathbb{Z} \equiv \{x \mid -\}$.
2. $\mathbb{Z}_n \equiv \{x \mid x^n\}$.
3. $D_n \equiv \{x, y \mid x^n, y^2, (xy)^2\}$.
4. Für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ bestimmt die Präsentation

   $$\{x, y \mid x^{2m}, x^m y^{-2}, xyxy^{-1}\}$$

   eine Gruppe der Ordnung $4m$, genannt dizyklische Gruppe.
5. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \equiv \{x, y \mid xyx^{-1}y^{-1}\}$:
   Sei $X = \{x, y\}$, $R = \{xyx^{-1}y^{-1}\}$ und N der kleinste Normalteiler von $F(X)$, welcher R enthält. Exakt wie im Beweis zu Bemerkung 2.1.7 kann man hier zeigen, dass $F(X)/N$ abelsch ist. Das bedeutet also, dass man analog zum Beweis von Satz 2.1.8 die einzelnen Potenzen von x und y sammelt, so dass alle Elemente außer dem leeren Wort (Nullpotenzen sind nicht reduziert) von $F(X)/N$ eine der Formen

   $$\begin{array}{rl} x^r y^s N & \qquad r, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ x^r N & \qquad r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ y^s N & \qquad s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{array}$$

   hat. Nun kann einfach direkt ein Isomorphismus von $F(X)/N$ nach $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ angegeben werden, indem

   $$\begin{array}{rcl} x^r y^s N & \mapsto & (r, s) \\ x^r N & \mapsto & (r, 0) \\ y^s N & \mapsto & (0, s) \end{array}$$

   sowie das leere Wort auf $(0, 0)$ abgebildet wird.
6. Die Präsentation

   $$\{x_1, \ldots, x_n \mid x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}, 1 \leq i < j \leq n\}$$

   bestimmt eine *freie abelsche Gruppe von Rang n*. Man beachte hierbei, dass *frei abelsch* nicht bedeutet, dass die Gruppe *frei* ist. Dies ist jedoch eigentlich klar: Freie Gruppen haben aus Prinzip keine definierenden Relationen.

7. $F_2 \times F_2 \equiv \{x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}, i \in \{1,2\}, j \in \{3,4\}\}$:
Wie immer seien die Erzeuger in einer Menge X, die definierenden Relationen in R und N sei der kleinste Normalteiler von $F(X)$, welcher R enthält.F_2 hat 2 Erzeuger, 4 Erzeuger für das kartesische Produkt zu wählen liegt also nahe. Durch die vier Relationen wird erreicht, dass

$$\forall i \in \{1,2\}\, \forall j \in \{3,4\}\, \forall r, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : x_i^r x_j^s N = x_j^s x_i^r N$$

gilt. Nun kann man also in einem Element aus $F(X)/N$ die Potenzen von x_3, x_4 so lange nach rechts, sowie die Potenzen von x_1, x_2 nach links schieben, bis dieses letztlich in zwei Hälften geteilt ist. Die linke besteht nur aus Potenzen von x_1 und x_2, die rechte aus Potenzen von x_3 und x_4. Einen Isomorphismus von $F(X)/N$ nach $F_2 \times F_2$ erhält man nun einfach, indem man die linke Seite auf die erste Komponente des 2-Tupels abbildet und die rechte Seite auf die zweite.
Hiermit hat man ein interessantes Ergebnis erhalten: Auch wenn zwei Gruppen selbst frei sind gilt dies im Allgemeinen nicht für ihr kartesisches Produkt.

Bemerkung 2.2.5:

Dieselbe Gruppe kann unterschiedliche Präsentationen haben, z.B.

$$\mathbb{Z} \equiv \{x \mid -\} \equiv \{x, y \mid y\}$$
$$\mathbb{Z}_6 \equiv \{x \mid x^6\} \equiv \{x, y \mid x^3, y^2, xyx^{-1}y^{-1}\}.$$

Die zweite Präsentation für $\mathbb{Z}_6$ beschreibt die Gruppe in der Form $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$.

Bevor ich zum zweiten großen Teil der Arbeit komme, in welchem ich auf einen graphentheoretischen Beweis vom Satz von Nielsen-Schreier hinarbeiten werde, möchte ich hier gerne einen Exkurs machen und das *freie Produkt* definieren und einige Eigenschaften angeben.

2.3 Das freie Produkt

Definition 2.3.1:

Seien G, H Gruppen. Dann können Wörter $x_1 x_2 \dots x_n$ gebildet werden, wobei jedes x_i aus der disjunkten Vereinigung $G \sqcup H$ stammt. Wir nennen diesmal ein Wort ***reduziert***, wenn für ein beliebiges $i \in [n-1]$ gilt, dass x_i und x_{i+1} nie zur selben Gruppe gehören und, dass für ein $i \in [n]$ x_i niemals die Identität in G oder H ist.

Satz/Definition 2.3.2:

Man habe G, H wie in Definition 18 gegeben. Bezeichne $G * H$ die Menge, welche alle reduzierten Wörter $x_1 x_2 \dots x_n$ aus $G \sqcup H$, sowie das leere Wort enthält. Multipliziere Elemente durch Nacheinanderstellen und anschließendes Reduzieren, falls notwendig. Reduzieren bedeutet hierbei, dass x_i entfernt wird, falls es für ein $i \in [n]$ die Identität in G oder H ist oder dass, falls $x_i x_{i+1}$ für ein $i \in [n-1]$ aus derselben Gruppe stammen, das Paar $x_i x_{i+1}$ durch das zugehörige Produkt in der jeweiligen Gruppe ersetzt wird. Dann ist $G*H$ eine Gruppe, man nennt sie das ***freie Produkt*** von G und H.

Beweis:

Das Produkt zweier Wörter $w_1, w_2 \in G*H$, geschrieben $\overline{w_1 w_2}$, ist auf $G*H$ abgeschlossen, das letzte Symbol in w_1 und das erste in w_2 kann zwar aus derselben Gruppe stammen, durch Ersetzen des Symbolpaares durch das zugehörige Produkt (und Entfernen, falls es sich dabei um die Identität handelt) wird jedoch garantiert, dass am Ende immer ein reduziertes Wort erhalten wird. Das neutrale Element ist das leere Wort und das Inverse zu einem Wort

$$x_1 x_2 \dots x_n \text{ ist } x_n^{-1} \dots x_2^{-1} x_1^{-1}.$$

Die Assoziativität geht wieder darauf zurück, dass jedes Wort w genau ein zugehöriges reduziertes Wort $\overline{w}$ hat. Der Beweis hierzu ist praktisch identisch zu dem von Satz 2.1.4: Man definiert für jedes $x \in G \sqcup H$ eine Permutation φ_x der reduzierten Wörter durch

$$\varphi_x(w) = \overline{xw} \qquad w \in G * H.$$

Dann ergibt sich für ein beliebiges Wort

$$u = x_1 x_2 \dots x_s$$

die zugehörige zusammengesetzte Permutation

$$\varphi_u = \varphi_{x_1} \varphi_{x_2} \dots \varphi_{x_s}.$$

Wieder ist zu beachten, dass die Permutationen der reduzierten Wörter eine *Gruppe* unter Komposition bilden und deshalb für Wörter u und w, für welche gilt, dass u auf irgendeine Weise zu w reduziert werden kann, $\varphi_u = \varphi_w$ gelten muss. Wenn man nun wieder annimmt, dass u auf zwei unterschiedliche Arten zu v und w reduziert werden kann, gilt damit $\varphi_u = \varphi_v = \varphi_w$. Anwendung von φ_w aufs leere Wort liefert jedoch w, und φ_v auf v, also muss $v = w$ gelten.
Nun sieht man sofort, dass $\overline{(\overline{w_1 w_2}) w_3} = \overline{w_1 (\overline{w_2 w_3})}$, da beides Reduktionen vom Wort $w_1 w_2 w_3$ sind, dieses hat aber das eindeutig bestimmte zugehörige reduzierte Wort $\overline{w_1 w_2 w_3}$. ■

Satz 2.3.3:

Sei P eine Gruppe, $H \subset P, G \subset P$. Dann existiert ein Isomorphismus $\varphi : P \to G * H$ mit $\varphi_{|G} = id_G$ und $\varphi_{|H} = id_H$ genau dann, wenn für eine beliebige Gruppe K und einen Homomorphismus von je G und H nach K eine eindeutige Fortsetzung dieser Homomorphismen zu einem Homomorphismus von ganz P nach K existiert.

Beweis:

" $\Longrightarrow$ ":

Gegeben sei ein Isomorphismus $\varphi : P \to G * H$, für den $\varphi_{|G} = id_G$ und $\varphi_{|H} = id_H$ gilt. Da $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ gilt und φ bijektiv ist, ist also jedes Element aus $P \setminus \{e\}$ eindeutig durch alternierende Kombination von Elementen aus G und H, also anders gesagt durch reduzierte Wörter aus $G * H$, darstellbar. Für eine beliebige Gruppe K und Homomorphismen $\psi_1 : G \to K$ und $\psi_2 : H \to K$ gibt es daher nur eine Möglichkeit, einen Homomorphismus $\psi : P \to K$ zu konstruieren, und zwar indem jedes reduzierte Wort

$$x_1 x_2 \dots x_n$$

auf

$$\psi_{i(1)}(x_1)\psi_{i(2)}(x_2)\dots\psi_{i(n)}(x_n) \text{ mit } i(k) = \begin{cases} 1 & x_k \in G \\ 2 & x_k \in H \end{cases}$$

und die Identität in P auf die in K abgebildet wird.

" $\Longleftarrow$ " :

Man nehme nun an, dass für eine beliebige Gruppe K und Homomorphismen von G nach K und von H nach K immer eine eindeutige Fortsetzung dieser Homomorphismen zu einem Homomorphismus von ganz P nach K existiert. Sei $\pi : G * H \to P$ der natürliche Homomorphismus, welcher reduzierte Wort aus $G * H$ auf das zugehörige Produkt aus Elementen von G und H in P abbildet. Es gilt $\pi_{|G} = id_G$ und $\pi_{|H} = id_H$, zeigt man also, dass π ein Isomorphismus ist, so ist die Umkehrabbildung der gesuchte Isomorphismus von P nach $G * H$. Die Inklusionen $G \hookrightarrow G * H$ und $H \hookrightarrow G * H$ können zu einem Homomorphismus $\varphi : P \to G * H$ fortgesetzt werden. Offenbar gilt $\varphi\pi = id_{G*H}$, da φ auf G und H die Identität ist. Außerdem sind sowohl $\pi\varphi$, als auch id_P Homomorphismen, welche die Inklusionen $G \hookrightarrow P$ und $H \hookrightarrow P$ auf ganz P fortsetzen. Nach Voraussetzung ist diese Fortsetzung jedoch eindeutig, also muss $\pi\varphi = id_P$ gelten. Damit ist $\varphi : P \to G * H$ der gesuchte Isomorphismus. ■

Nach diesem Exkurs werde ich nun zum zweiten großen Teil der Arbeit kommen.

3 Bäume und der Satz von Nielsen-Schreier

Im Folgenden werde ich den Satz von Nielsen-Schreier zuerst angeben, um diesen dann mithilfe graphentheoretischer Mittel zu beweisen. Man beachte, dass für reduzierte Wörter nun wieder Definition 2.1.2(2) gilt und nicht die im Exkurs zum freien Produkt gegebene. Die verwendeten Grafiken sind dabei denen in [1, Kapitel 28] nachempfunden.

Satz 3.0.1 (Nielsen-Schreier):

Jede Untergruppe einer freien Gruppe ist wieder frei.

Um den Satz von Nielsen-Schreier zu beweisen, müssen zuerst wichtige graphentheoretische Definitionen gegeben werden.

3.1 Graphentheoretische Grundlagen

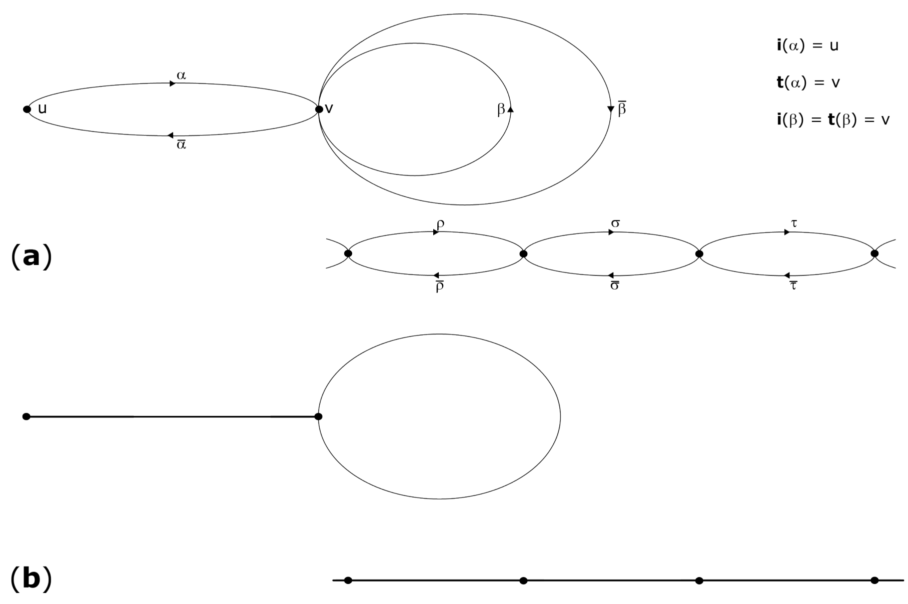
Definition 3.1.1:

Ein ***Graph*** Γ besteht aus zwei Mengen A (gerichtete Kanten) und V (Knoten), zusammen mit zwei Funktionen

$$\begin{aligned} A \to A, &\qquad \alpha \mapsto \bar{\alpha} \\ A \to V \times V, &\qquad \alpha \mapsto (i(\alpha), t(\alpha)) \end{aligned}$$

welche die Bedingungen $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$, $\bar{\alpha} \neq \alpha$ und $i(\bar{\alpha}) = t(\alpha)$ für jedes $\alpha \in A$ erfüllen. Die Knoten $i(\alpha), t(\alpha)$ sind die ***Anfangs-*** und ***Endknoten*** der gerichteten Kante α, und $\bar{\alpha}$ bezeichnet die ***Umkehrung*** von α. Im Weiteren werde ich gerichtete Kanten lediglich als Kanten bezeichnen.

Diese Definition wirkt abstrakt, jedoch kann man sich schnell anhand Grafik 15.1(a) klarmachen, was gemeint ist. Praktisch reicht auch die vereinfachte Darstellung in Grafik 15.1(b), jedoch muss hier beachtet werden, dass jede Kante nun ein Paar von zwei gerichteten Kanten darstellt.



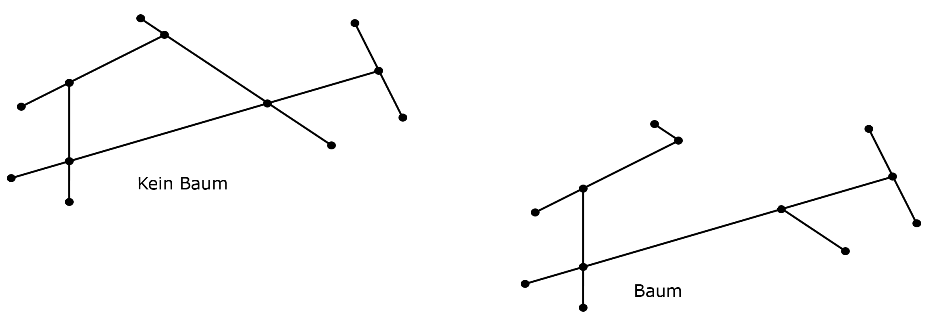
Grafik 15.1

Definition 3.1.2:

1. Ein ***Weg*** in einem Graphen Γ zwischen zwei Kanten u und v ist eine angeordnete Aneinanderreihung von Kanten $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, so dass $i(\alpha_1) = u$, $i(\alpha_{k+1}) = t(\alpha_k)$ für $1 \leq k \leq n-1$, und $t(\alpha_n) = v$.
2. Der Spezialfall $\alpha\bar{\alpha}$ bei dem auf eine Kante direkt ihre Umkehrung folgt wird ein ***Rundtrip*** genannt.
3. Ein Graph ist ein ***Baum*** falls zwei beliebige Knoten durch einen Weg verbunden werden können, und falls jeder Weg der einen Knoten mit sich selbst verbindet einen Rundtrip enthalten muss (siehe Grafik 15.1).

Bemerkung/Definition 3.1.3:

Sei Γ ein Baum und u, v zwei unterschiedliche Knoten von Γ. Dann existiert *genau ein* Weg, welcher u und v verbindet und keine Rundtrips enthält. Dieser Weg ist die ***Geodäte*** $\overrightarrow{uv}$ von u nach v. Jeder andere Weg zwischen u und v kann durch sukzessives Hinzufügen von Rundtrips zu der Geodäte erhalten werden.



Grafik 16.1

Beweis:

Man geht schrittweise vor: Zuerst werde ich zeigen, dass genau ein Weg zwischen zwei verschiedenen, jedoch sonst beliebigen Knoten u und v in Γ existiert, welcher keine Rundtrips enthält, nämlich die Geodäte. Im Anschluss werde ich dann beweisen, dass man jeden weiteren möglichen Weg durch hinzufügen von Rundtrips zur Geodäte konstruieren kann.

I Existenz eines Wegs ohne Rundtrips:

Nach Definition eines Baums existiert ein Weg, welcher u mit v verbindet. Bezeichne diesen mit P und stelle ihn in Form von Aneinanderreihungen der Kanten wie folgt dar:

$$P = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,$$

mit $i(\alpha_1) = u$ und $t(\alpha_n) = v$. Gehe P nun entlang, bis man auf eine Umkehrung einer bereits verwendeten Kante trifft, gelte z.B. $\alpha_{i+k} = \bar{\alpha}_i$. Das bedeutet

$$t(\alpha_{i-1}) = i(\alpha_i) = t(\alpha_{i+k}) = i(\alpha_{i+k+1}).$$

Man kann also P kürzen, indem man die Kanten α_i bis α_{i+k} entfernt. Somit gilt

$$P = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{i-1}\alpha_{i+k+1} \dots \alpha_n.$$

P ist weiterhin ein Weg zwischen u und v und es wurde mindestens ein Rundtrip entfernt. Dies kann nun so lange wiederholt werden, bis kein Rundtrip mehr vorhanden ist.

II Eindeutigkeit der Geodäte:

Seien P und Q Wege von u nach v, die beide keine Rundtrips enthalten. Man muss nun zeigen, dass $P = Q$ gilt. Betrachte wieder beide Wege als Aneinanderreihung von Kanten

$$\begin{aligned} P &= \alpha_1 \dots \alpha_n \\ Q &= \beta_1 \dots \beta_m \end{aligned}$$

und untersuche nun den Weg

$$P\bar{Q} = \alpha_1 \dots \alpha_n \bar{\beta}_m \dots \bar{\beta}_1.$$

Der Weg $P\bar{Q}$ verbindet u mit sich selbst, nach Definition 3.1.2(3) muss also mindestens ein Rundtrip darin vorhanden sein. Da sowohl P, als auch Q beide keine Rundtrips enthalten, muss also $\beta_i = \alpha_j$ für ein $i \in [m], j \in [n]$ gelten. Man kann aber direkt sehen, dass insbesondere $\alpha_1 = \beta_1$ gelten muss: Falls der sicher vorhandene Rundtrip nur in der Mitte des Weges auftauchen würde, könnte man ihn wie in Teil I eliminieren. Der neu entstandene Weg würde dann aber weiterhin u mit sich selbst verbinden, nach Definition eines Baumes würde also weiterhin ein Rundtrip existieren. Nun kann man α_1 und β_1 aus $P\bar{Q}$ entfernen und diese Argumentation weiterführen. Man sieht, dass sich am Ende alle Kanten wegkürzen, also $P = Q$ gilt.

III Konstruktion beliebiger Wege aus der Geodäte:

Sei P ein beliebiger Weg, welcher u und v verbindet. In Schritt I hat man gesehen, dass dieser Weg zu einem Weg ohne Rundtrips vereinfacht werden kann und in Schritt II, dass es nur genau einen Weg mit dieser Eigenschaft gibt. Jeder Weg zwischen zwei Knoten u, v des Baumes Γ enthält also die Kanten der Geodäte $\overrightarrow{uv}$. Wenn man nun nacheinander Kanten hinzufügt, muss es sich bei diesen um Rundtrips handeln, da eine Vereinfachung sonst auf einen anderen Weg ohne Rundtrips führen würde, was II widerspricht. ■

Im Folgenden werden wir nun die Idee einer Gruppe, die auf einen Graphen wirkt ausnutzen.

Definition 3.1.4:

Eine ***Wirkung*** von einer Gruppe G auf einen Graphen Γ ist eine Wirkung von G auf A und auf V, so dass $g(\bar{\alpha}) = \overline{g(\alpha)}$, $g(i(\alpha)) = i(g(\alpha))$ und $g(\alpha) \neq \bar{\alpha}$ für alle $g \in G$ und $\alpha \in A$. Anders gesagt, die Elemente von G permutieren die Kanten und Knoten von Γ in einer mit der Struktur von Γ als Graph vereinbaren Weise, und kein Element von G kann eine Kante umkehren. Die Gruppenelemente verhalten sich korrekt auf Endknoten, da

$$\begin{aligned} g(t(\alpha)) &= g(i(\bar{\alpha})) &&= i(g(\bar{\alpha})) \\ &= i(\overline{g(\alpha)}) &&= t(g(\alpha)) \end{aligned}$$

für jede Kante α. Man sagt, dass G auf Γ ***frei wirkt***, wenn der Stabilisator jedes Knoten nur die triviale Untergruppe $\{e\}$ von G ist.

Bemerkung 3.1.5:

Wirke eine Gruppe G auf einem Baum Γ. Wenn ein Element $g \in G$ die Knoten u und v fixiert, d.h. $g(u) = u, g(v) = v$, dann gilt direkt $g(\overrightarrow{uv}) = \overrightarrow{uv}$.

Beweis:

Da u und v fixiert werden, ist $g(\overrightarrow{uv})$ weiterhin ein Weg, welcher diese beiden Knoten verbindet. Alle Wege zwischen u und v sind nach Bemerkung 3.1.3 durch Hinzufügen von Kanten (genauer gesagt Rundtrips) zur Geodäte konstruierbar. Weiterhin gilt, dass die Anzahl an Kanten in $\overrightarrow{uv}$ und $g(\overrightarrow{uv})$ offenbar auch gleich bleibt, $g(\overrightarrow{uv})$ kann also keine Rundtrips enthalten. Die Geodäte $\overrightarrow{uv}$ ist jedoch der eindeutige rundtripfreie Weg zwischen u und v, also gilt $g(\overrightarrow{uv}) = \overrightarrow{uv}$. ■

Beispiel 3.1.6:

1. Man nehme einen Graphen dessen vereinfachtes Bild der Buchstabe Y ist und lasse G eine zyklische Gruppe der Ordnung 3 sein, welche durch Rotation wirkt. Formal bedeutet dies $A = \{\alpha_r, \bar{\alpha}_r \mid r = 1, 2, 3\}$ und $V = \{v, v_1, v_2, v_3\}$ mit $\bar{\bar{\alpha}}_r = \alpha_r$, $i(\alpha_r) = t(\bar{\alpha}_r) = v$, $t(\alpha_r) = i(\bar{\alpha}_r) = v_r$. Falls G von g erzeugt wird ist die Wirkung durch $g(\alpha_r) = \alpha_{r+1}(mod\,3)$ bestimmt. Der Stabilisator von v ist G, in diesem Fall wirkt G also nicht frei.
2. A habe ein Paar von Kanten $\alpha_r, \bar{\alpha}_r$ für jede ganze Zahl r, identifiziere V mit $\mathbb{Z}$ und setze $\bar{\bar{\alpha}}_r = \alpha_r$, $i(\alpha_r) = t(\bar{\alpha}_r) = r + 1$. Man kann sich diesen Graphen als Zahlenstrahl vorstellen, wobei die ganzen Zahlen die Knoten des Graphen markieren. Falls G unendlich zyklisch ist und von einem Element g erzeugt wird bestimmt $g(\alpha_r) = \alpha_{r+1}$ eine *freie* Wirkung von G auf Γ.

3. Wähle Γ wie im vorherigen Beispiel und sei G die unendliche Diedergruppe mit Präsentation $\{g, h \mid h^2, (gh)^2\}$. Dann gibt $g(\alpha_r) = \alpha_{r+2}$, $h(\alpha_r) = \bar{\alpha}_{-r-1}$ eine Wirkung von G auf Γ. In diesem Beispiel wirkt G nicht frei, da der Stabilisator jedes Knoten eine zyklische Gruppe der Ordnung 2 ist. Explizit gesagt ist der Stabilisator eines Knoten r von Γ die Untergruppe $\{e, g^r h\}$.

4. Mit einer gegebenen Gruppe G und einer Erzeugermenge X von G kann man wie folgt den Cayleygraphen $\Gamma(G, X)$ konstruieren: Der Einfachheit halber nehmen wir $x^2 \neq e$, falls $x \in X$. Sei A die Sammlung aller angeordneten Paare (g, z), wobei g aus G kommt und entweder z oder z^{-1} zu X gehört. Nehme weiterhin $V = G$ und definiere

$$\begin{aligned} \overline{(g,z)} &= (gz, z^{-1}), \\ i((g,z)) = g, &\qquad t((g,z)) = gz. \end{aligned}$$

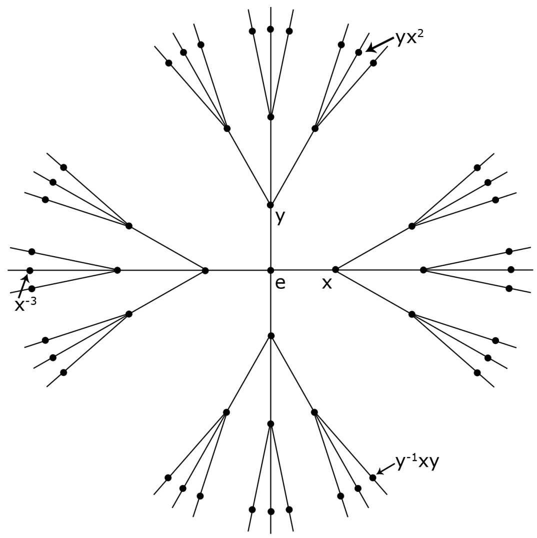
   Somit hat man also einen Knoten für jedes Element aus G und eine Kante mit Anfangsknoten g_1 und Endknoten g_2 immer dann, wenn entweder $g_1 x = g_2$ oder $g_1 x^{-1} = g_2$ für einen beliebigen Erzeuger x aus X. Die Wirkung von G auf sich selbst durch linke Translation permutiert die Knoten von $\Gamma(G, X)$ und wird durch $g'((g, z)) = (g'g, z)$ auf die Kanten zu einer freien Wirkung von G auf $\Gamma(G, X)$ fortgesetzt. Im Fall, dass $x^2 = e$ für manche $x \in X$ werden zusätzliche Kanten benötigt.
   Zwei beliebige Knoten g, h dieses Graphens können durch einen Weg verbunden werden: Mit gegebenen $g, h \in G$ kann man $g^{-1}h$ als Produkt $z_1 z_2 \dots z_k$ von Symbolen darstellen, wobei jedes einzelne dabei entweder aus X stammt oder sein Inverses in X hat. Dann gilt $h = g z_1 z_2 \dots z_k$ und die Aneinanderreihung der Kanten

$$(g, z_1), (gz_1, z_2), \dots (gz_1 \dots z_{k-1}, z_k)$$

   ist ein Weg welcher in g startet und in h endet.
   Hier zwei Spezialfälle: Wenn G eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung n ist, und wenn X aus einem einzelnen Erzeuger besteht, kann man sich $\Gamma(G, X)$ als Polygon mit n Seiten vorstellen, wobei die Wirkung von G durch Rotation repräsentiert wird. Wenn G eine freie Gruppe ist, welche von $X = \{x, y\}$ erzeugt wird, ist die Struktur von $\Gamma(G, X)$ wie in Grafik 20.1 dargestellt. Hierbei sind natürlich nur die ersten Schritte gezeichnet.

3.2 Ein Beweis des Satzes von Nielsen-Schreier über Gruppenwirkungen auf Bäume

Bei Betrachtung von Grafik 20.1 fällt direkt die Struktur auf. Man vermutet korrekt, dass es sich bei diesem Graphen um einen Baum handelt.



Grafik 20.1

Satz 3.2.1:

Ist X eine freie Erzeugermenge von G, dann ist $\Gamma(G, X)$ ein Baum.

Beweis:

Angenommen $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ ist ein Weg welcher den Knoten g mit sich selbst verbindet. Falls $\alpha_1 = (g, z_1), \alpha_2 = (gz_1, z_2), \ldots \alpha_n = (gz_1 \ldots z_{n-1}, z_n)$ bedeutet dies, dass $g = gz_1z_2 \ldots z_n$ und deshalb $e = z_1z_2 \ldots z_n$. Da es sich bei X um eine freie Erzeugermenge von G handelt, ist das leere Wort das einzige reduzierte Wort, welches e repräsentiert, also muss $z_1z_2 \ldots z_n$ ein Paar von benachbarten Symbolen der Form zz^{-1} beinhalten. In anderen Worten, $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ enthält einen Rundtrip. Somit ist $\Gamma(G, X)$ ein Baum. ■

Definition 3.2.2:

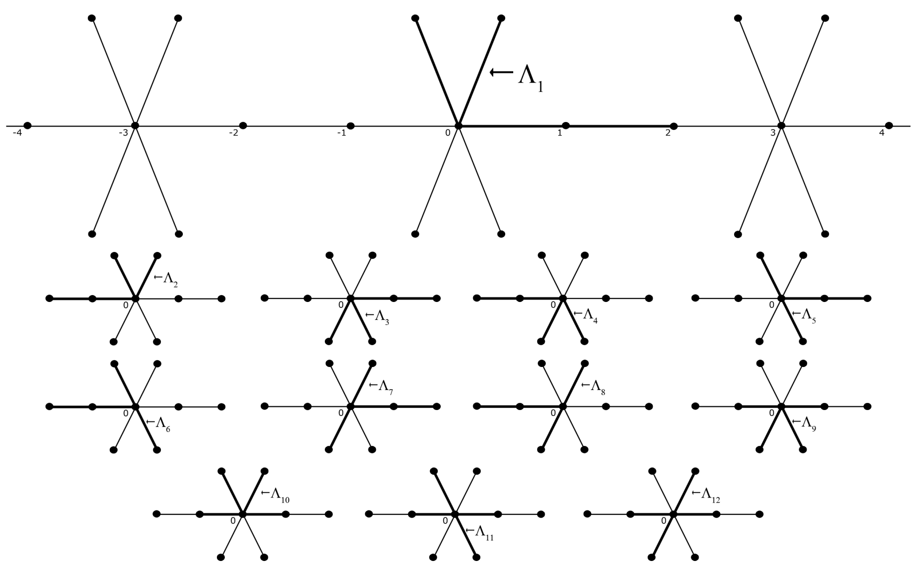
Angenommen eine Gruppe G wirkt auf einem Baum Γ. Betrachte die Sammlung T von allen Bäumen in Γ welche nicht mehr als eine Kante und einen Knoten von jeder Bahn enthalten. Ein Element Λ aus T welches maximal bezüglich Inklusion ist wird ***Referenzbaum*** genannt. Maximal bedeutet, dass wenn Δ auch zu T gehört, und wenn $\Lambda \subset \Delta$, dann gilt sofort $\Lambda = \Delta$. Die Existenz eines solchen maximalen Elements wird durch das Lemma von Zorn garantiert: $(T, \subset)$ ist eine halbgeordnete Menge und es ist leicht zu sehen, dass jede Kette eine obere Schranke in T besitzt.

Bekanntlich ist das Lemma von Zorn äquivalent zum Auswahlaxiom und somit auch nicht komplett ohne Probleme anwendbar, da hierdurch auch nicht intuitive Problematiken wie das Banach-Tarski-Paradoxon entstehen und so manche

Teile der Mathematik sowie der theoretischen Physik bewusst auf dessen Benutzung verzichten. Die überwiegende Mehrheit akzeptiert es jedoch und es ist in der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre enthalten, der Grundlage fast aller Zweige der Mathematik. Zusätzlich gilt, dass, wie schon in der Einleitung angesprochen, jeder Beweis des Satzes von Nielsen-Schreier an einer Stelle die Benutzung des Auswahlaxioms oder einer äquivalenten Formulierung benötigt. Geht man davon aus, dass das Auswahlaxiom nicht wahr ist, so gilt dies auch für den Satz von Nielsen-Schreier.

Beispiel 3.2.3:

Sei Γ ein unendlicher Baum wie in Grafik 21.1 oben dargestellt. Stelle man sich diesen Baum als Teilmenge der Ebene vor und benutze die Wirkung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \equiv \{g, h \mid ghg^{-1}h^{-1}, h^2\}$ bestimmt durch $g((x,y)) = (x+3, y)$, $h((x,y)) = (x, -y)$. In Grafik 21.1 sind ebenfalls alle zwölf Referenzbäume welche den Knoten 0 beinhalten aufgezeigt.



Grafik 21.1

Satz 3.2.4:

Ein Referenzbaum enthält genau einen Knoten aus jeder Bahn.

Beweis:

Sei Λ ein Referenzbaum für eine Wirkung von G auf einem Baum Γ. Nach Definition gilt, dass keine zwei Knoten aus Λ in derselben Bahn liegen. Angenommen es gebe eine Bahn aus welcher Λ keinen Knoten enthält. Wähle einen Knoten v aus Λ und einen Knoten z von Γ wessen Bahn nicht Λ trifft. Sei α die erste Kante der Geodäte $\overrightarrow{zv}$ und setze $y = t(\alpha)$. Falls die Bahn von y Λ trifft, beispielsweise $g(y) \in \Lambda$, gilt, dass Hinzufügen von $g(z), g(\alpha), g(\bar{\alpha})$ zu Λ einen größeren Baum als Λ erzeugt, welcher immer noch höchstens einen Knoten jeder Bahn enthält. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalitätsannahme von Λ. Sollte die Bahn von y nicht Λ treffen, so ersetzt man lediglich z durch y und wiederholt den Vorgang bis man auf einen Widerspruch stößt. ■

Satz 3.2.5:

Wenn G frei auf einem Baum wirkt, dann ist G eine freie Gruppe.

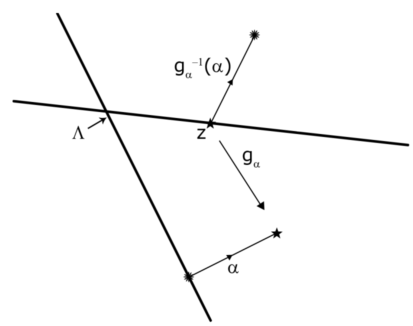
Beweis:

Angenommen G wirkt frei auf einem Graphen Γ, wähle einen Referenzbaum Λ für diese Wirkung. Dann enthält Λ nach Satz 3.2.4 genau einen Knoten aus jeder Bahn. Bezeichne mit A_* die Sammlung von Kanten von Γ, welche zwar selbst nicht in Λ liegen, aber ihre Anfangsknoten in Λ haben. Für eine gegebene Kante $\alpha \in A_*$ sei z der Knoten aus Λ welcher in derselben Bahn wie $t(\alpha)$ liegt. Wähle dann ein Gruppenelement g_α, so dass $g_\alpha(z) = t(\alpha)$. Dieses Element ist eindeutig bestimmt, denn falls g_α und h_α beide z auf $t(\alpha)$ senden würden, würde gelten, dass $h_\alpha^{-1} g_\alpha(z) = z$. Die Wirkung ist jedoch *frei*, also müsste $h_\alpha^{-1} g_\alpha$ die Identität in G sein, und damit $h_\alpha = g_\alpha$. Diese Kanten und Gruppenelemente kommen in *Paaren*, da die Kante $\alpha' = g_{alpha}^{-1}(\bar{\alpha})$ ebenfalls zu A_* gehört und das zugehörige Gruppenelement $g_{\alpha'} = g_\alpha^{-1}$ ist, wie in Grafik 23.1 illustriert. Von jedem solchen Paar g_α, g_α^{-1} wird nun eines ausgewählt. Die resultierende Teilmenge von G wird mit X bezeichnet. Nun werde ich zeigen, dass X eine freie Erzeugermenge von G ist.
Man wähle einen Knoten v aus Λ. Zu einem gegebenen Element $g \in G\backslash\{e\}$ sei α die erste Kante der Geodäte von v nach $g(v)$ welche *nicht* in Λ liegt. Dann gilt folglich, dass α zu A_* gehört. Wende nun g_α^{-1} auf die Geodäte von $t(\alpha)$ nach $g(v)$ an. Der resultierende Weg beginnt beim Knoten $g_\alpha^{-1}(t(\alpha))$ aus Λ und endet bei $g_\alpha^{-1} g(v)$. Man folge diesem neuen Weg bis zur ersten Kante β welche Λ verlässt, und wende dann g_β^{-1} auf die Geodäte von $t(\beta)$ nach $g_\alpha^{-1} g(v)$ an. Wieder gilt, dass der neue Weg in Λ beginnt und dieses Mal bei $g_\beta^{-1} g_\alpha^{-1} g(v)$ endet. Diesen Vorgang wiederholt man nun und bemerkt, dass der Weg nach jeder Iteration kürzer wird. Daher erzeugt man letztendlich einen Weg welcher *gänzlich* in Λ liegt. Der Endknoten sei mit $g_\nu^{-1} \dots g_\beta^{-1} g_\alpha^{-1} g(v)$ bezeichnet. Da keine zwei Knoten aus Λ zur selben Bahn gehören, muss $g_\nu^{-1} \dots g_\beta^{-1} g_\alpha^{-1} g(v) = v$ gelten, und da die Wirkung frei ist bedeutet dies, dass der Stabilisator trivial ist, also $g_\nu^{-1} \dots g_\beta^{-1} g_\alpha^{-1} g = e$ und somit

$$g = g_\alpha g_\beta \dots g_\nu. \qquad (*)$$

Man sieht bereits, dass G von den Elementen aus X erzeugt wird.
Die rechte Seite von $(*)$ bestimmt ein *reduziertes* Wort $w(g)$ in Symbolen

aus X. In der Konstruktion wurde die Geodäte $\overrightarrow{vg(v)}$ verwendet, aber jeder andere Weg zwischen v und $g(v)$ wäre auch möglich gewesen und hätte zu *demselben* reduzierten Wort geführt. Wir überprüfen zuallererst, dass das Hinzufügen eines einzelnen Rundtrips $\sigma\bar{\sigma}$ zu der Geodäte nicht $w(g)$ ändert. Dies ist einfach, man muss nur auf σ während des oben beschriebenen Prozesses achten. Entweder σ landet an einem Punkt innerhalb von Λ, was bedeutet, dass $(*)$ unverändert bleibt. Andernfalls gilt, dass σ zu einer Kante τ aus A_* übergeht. Dann wird $(*)$ zu $g = g_\alpha g_\beta \dots g_\tau g_\tau^{-1} \dots g_\nu$. In beiden Fällen bleibt $w(g)$ unverändert. Zusätzliche Rundtrips können auf dieselbe Art behandelt werden. Man erinnere sich an Bemerkung 24, in der gezeigt wurde, dass jeder beliebiger Weg zwischen zwei Knoten durch sukzessives Hinzufügen von Rundtrips zur Geodäte erzeugt werden kann. Um die Argumentation abzuschließen wird nun noch gezeigt, dass jede Zerlegung $g = g_\gamma g_\delta \dots g_\rho$, mit $\gamma, \delta, \dots, \rho \in A_*$, durch passende Wahl eines Weges von v nach $g(v)$ realisiert werden kann. Dann kann man sicher sein, dass $w(g)$ das *einzige* reduzierte Wort aus Elementen von X ist, welches g repräsentiert. Man zeige dies durch Induktion über die Länge der Zerlegung. Setze $g_1 = g_\delta \dots g_\rho$ und sei P der Weg von v nach $g_1(v)$, welcher diese Zerlegung von g_1 realisiert. Folgt man $\overrightarrow{vg_\gamma}(v)$ und anschließend $g_\gamma(P)$, so erhält man einen Weg Q von v nach $g(v)$. Betrachte nun $\overrightarrow{vg_\gamma}(v)$: Die Geodäte beginnt mit $\overrightarrow{vi(\gamma)}$, verlässt anschließend Λ über γ und verläuft weiter über $g_\gamma(\overrightarrow{zv})$, wobei $z = g_\gamma^{-1}(t(\gamma)) \in \Lambda$. Anwendung des ersten Schrittes des Prozesses auf Q liefert g_γ, womit die Geodäte $\overrightarrow{zv}$ (welche in Λ liegt), gefolgt von P übrig bleibt.P realisiert die Zerlegung $g_1 = g_\delta \dots g_\rho$, also folgt, dass Q wie gefordert die Zerlegung $g_\gamma g_\delta \dots g_\rho$ von g realisiert. ■



Grafik 23.1

Hiermit sind wir nun schließlich an dem Punkt angekommen, dass Satz 3.0.1, der Satz von Nielsen-Schreier bewiesen werden kann. Zur Erinnerung gebe ich diesen noch einmal an.

Satz 3.0.1 (Nielsen-Schreier):

Jede Untergruppe einer freien Gruppe ist wieder frei.

Beweis:

Sei $F = F(X)$ und $G \subset F$. Wir wissen bereits aus Beispiel 3.1.6(4) und Satz 3.2.1, dass F frei auf dem Baum $\Gamma(F, X)$ wirkt, und da $G \subset F$ gilt dies auch für G. Nach Satz 3.2.5 ist G also frei. ■

3.3 Der Weg zu einem alternativen Beweis

Zum Abschluss der Arbeit werde ich nun noch die Isomorphie von Fundamentalgruppen bestimmter Graphen zu freien Gruppen beweisen. Wie schon in der Einleitung qualitativ präsentiert, kann dadurch ein weiterer Beweis des Satzes von Nielsen-Schreier angegeben werden.

Definition 3.3.1:

1. Seien u, v Knoten eines Graphen Γ. Wenn P, P' Wege sind, welche beide u und v verbinden, sagt man, dass P' ***adjazent*** zu P ist, wenn P' durch Hinzufügen oder Entfernen eines einzelnen Rundtrips von P erhalten werden kann.
2. Definiere eine Relation $\sim$ auf der Sammlung aller Wege von u nach v in Γ so, dass $P \sim Q$, wenn Wege $P_1, \ldots, P_k$ existieren, welche alle u und v verbinden, so dass $P_1 = P, P_k = Q$ gilt und P_r adjazent zu $P_{r+1} \forall 1 \leq r \leq k-1$ ist.

Satz 3.3.2:

1. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.
2. Ist Γ ein Baum, gibt es genau eine Äquivalenzklasse.

Beweis:

1. Reflexivität ist offenbar gegeben, und Symmetrie gilt auch, da Adjazenz sowohl das Hinzufügen, als auch das Entfernen von Rundtrips enthält. Auch die Transitivität ist relativ simpel zu zeigen: Seien P, Q, R Wege in Γ mit $P \sim Q$ und $Q \sim R$. Es existieren Wege $P_1, \ldots, P_k$ mit $P_1 = P$ und $P_k = Q$, so dass P_r adjazent zu $P_{r+1} \forall 1 \leq r \leq k-1$ ist und Wege $Q_1, \ldots, Q_l$ mit $Q_1 = Q$ und $Q_l = R$, so dass Q_r adjazent zu $Q_{r+1} \forall 1 \leq r \leq l-1$ ist. Konstruiere nun eine Folge von Wegen

$$R_1, \ldots, R_{k+l-1} \text{ mit } \begin{cases} R_i = P_i & 1 \leq i \leq k \\ R_{i+k} = Q_{i+1} & 1 \leq i \leq l-1 \end{cases}$$

   Dann gilt $R_1 = P_1 = P$ und $R_{k+l-1} = Q_l = R$. Außerdem ist R_r adjazent zu $R_{r+1} \forall 1 \leq r \leq k+l$, anders gesagt gilt also $P \sim R$, was zu zeigen war.

2. In einem Baum bauen alle Wege zwischen u und v auf der Geodäte $\overrightarrow{uv}$ auf und können durch sukzessives Hinzufügen von Rundtrips zu dieser erhalten werden. Es gilt also $\overrightarrow{uv} \sim P$ für alle Wege P von u nach v. Da $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, müssen alle Wege also in derselben Äquivalenzklasse sein. ■

Definition 3.3.3:

Ein Weg P in einem Graphen Γ, welcher einen Knoten v aus Γ mit sich selbst verbindet wird als ***Schleife*** an v bezeichnet.

Definition/Satz 3.3.4:

Sei v ein Knoten eines Graphen Γ und P ein Weg darin. Man bezeichne mit $[P]$ die zugehörige Äquivalenzklasse bezüglich der Äquivalenzrelation aus Definition 33. Wenn $P = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_s$ und $Q = \beta_1\beta_2 \dots \beta_t$ beides Wege sind, so dass $t(\alpha_s) = i(\alpha_1)$ und $i(\alpha_1) = t(\alpha_t) = v$, schreibt man PQ für die Schleife $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_s\beta_1\beta_2 \dots \beta_t$.
Die Sammlung aller Äquivalenzklassen von Schleifen an v bildet eine Gruppe zusammen mit dem Produkt $[P][Q] = [PQ]$. Diese Gruppe heißt ***Fundamentalgruppe*** von Γ in v.

Beweis:

Man untersuche zuerst, ob das Produkt wohldefiniert ist. Seien P, Q Schleifen an v mit $[P] \neq [Q]$ und betrachte Wege $P' = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k \in [P]$ und $Q' = \beta_1\beta_2 \dots \beta_l \in [Q]$ und zeige, dass $P'Q' \sim PQ$ und damit $[PQ] = [P'Q']$. $P' \sim P$, d.h. es existiert eine Folge von Wegen $P_1, P_2, \dots, P_n$ mit $P_1 = P'$, $P_n = P$, so dass P_i adjazent zu $P_{i+1} \forall 1 \leq i \leq k-1$. Analog gilt dies für Q' in Verbindung mit Q, sei die Folge von Wegen hier mit $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ bezeichnet. Dann gilt für die Folge von Wegen

$$P_1Q_1, P_2Q_1, \dots, P_nQ_1, P_nQ_2, \dots, P_nQ_m,$$

dass $P_1Q_1 = P'Q', P_nQ_m = PQ$ und, dass zwei aufeinanderfolgende Wege in der Folge immer adjazent sind. Das Produkt ist auch offenbar auf der Menge der Äquivalenzklassen von Schleifen an v abgeschlossen: Wenn P und Q Schleifen an v sind, gilt dies für PQ ebenfalls. Assoziativität geht ebenfalls direkt aus der Definition des Produktes hervor. Seien P, Q, R Schleifen an v. Dann gilt

$$\begin{aligned} [H]([P][Q]) &= [H][PQ] &= [HPQ] \\ ([H][P])[Q] &= [HP][Q] &= [HPQ]. \end{aligned}$$

Das neutrale Element ist die Äquivalenzklasse, dessen Repräsentant der entartete Weg E ist, welcher nur den Knoten v enthält. Ein Äquivalenzklasse

$$[P] = [\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_r]$$

hat das inverse Element

$$[\bar{P}] = [\bar{\alpha}_r, \bar{\alpha}_{r-1}, \dots, \bar{\alpha}_1]. \blacksquare$$

Bemerkung 3.3.5:

Sei Γ ein Graph und nehme an, dass zwei beliebige unterschiedliche Knoten in Γ immer durch einen Weg verbunden werden können. Sei weiterhin Λ ein maximaler Baum in Γ. Dann enthält Λ jeden Knoten in Γ.

Beweis:

In Γ existiert zwischen zwei beliebigen, unterschiedlichen Knoten ein Weg, welcher diese verbindet. Wenn es also Knoten in Γ gibt, welche nicht in Λ liegen, muss der Weg zwischen einem Knoten in Λ und einem außerhalb davon irgendwann Λ verlassen. Also muss mindestens einer der nicht in Λ liegenden Knoten über eine einzige Kante mit Λ zu verbinden sein. Hinzufügen dieser Kante erweitert Λ um einen Knoten, erhält aber offenbar auch die Eigenschaft, dass Λ ein Baum ist. Dies wäre aber ein Widerspruch zur Maximalitätsannahme von Λ. ■

Satz 3.3.6:

Seien Γ und Λ wie in Bemerkung 3.3.5 und v ein Knoten in Γ. Man wähle eine Kante von jedem Paar von gerichteten Kanten, welche nicht in Λ liegen und bezeichne die resultierende Kantenmenge mit X. Dann gilt, dass die Fundamentalgruppe von Γ in v isomorph zur freien Gruppe $F(X)$ ist.

Beweis:

Definiere den Isomorphismus φ von $F(X)$ in die Fundamentalgruppe von Γ in v wie folgt: Bilde jeden Weg $\alpha \in X$ ab auf die Äquivalenzklasse, deren Repräsentant der Weg $P_\alpha = \overrightarrow{vi(\alpha)}\alpha\overrightarrow{t(\alpha)v}$ ist und das leere Wort auf die Äquivalenzklasse $[E]$. Alle restlichen Elemente von $F(X)$ werden so abgebildet, dass die Homomorphismuseigenschaft $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta) = [P_\alpha][P_\beta] = [P_\alpha P_\beta]$ für alle $\alpha, \beta \in X$ erfüllt ist. Dies ist injektiv, da zwei Wege $P_\alpha = \overrightarrow{vi(\alpha)}\alpha\overrightarrow{t(\alpha)v}$ und $P_\beta = \overrightarrow{vi(\beta)}\beta\overrightarrow{t(\beta)v}$ für $\alpha, \beta \in X$ mit $\alpha \neq \beta$ nie in einer Äquivalenzklasse sein können: Innerhalb der Geodäten existieren keine Rundtrips und α und β treten in ihnen auch nicht auf. Es ist also unmöglich Rundtrips zu entfernen oder hinzuzufügen, um von P_α auf P_β zu kommen oder umgekehrt. Dies gilt auch für die Produkte, seien hierzu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in X$ und betrachte

$$P_{\alpha_1} P_{\alpha_2} = \overrightarrow{vi(\alpha_1)}\alpha_1\overrightarrow{t(\alpha_1)v}\overrightarrow{vi(\alpha_2)}\alpha_2\overrightarrow{t(\alpha_2)v}$$

und

$$P_{\alpha_3} P_{\alpha_4} = \overrightarrow{vi(\alpha_3)}\alpha_3\overrightarrow{t(\alpha_3)v}\overrightarrow{vi(\alpha_4)}\alpha_4\overrightarrow{t(\alpha_4)v}.$$

Solange nicht $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ gilt, sind die Wege nicht äquivalent, da selbst in dem Fall, dass die zwei direkt aufeinanderfolgenden Geodäten sich umkehren würden gilt, dass es nicht möglich ist durch Hinzufügen oder Entfernen von Rundtrips die $\alpha_i, i \in [4]$ zu ändern. Die Abbildung ist auch Surjektiv: Jedes reduzierte Wort in $F(X) = \alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}\dots\alpha_n^{r_n}$ hat eine entsprechende Äquivalenzklasse mit Repräsentant $P_{\alpha_1}^{r_1}P_{\alpha_2}^{r_2}\dots P_{\alpha_n}^{r_n}$, das Hinzufügen von Rundtrips zu einem Weg P_α ändert offenbar nicht die Äquivalenzklasse. Das heißt also, dass die Äquivalenzklassen eindeutig durch die Reihenfolge und Anzahl von Elementen aus X bestimmt ist. Alle Schleifen an v, welche sich nur in Λ befinden, also kein Element aus X enthalten, liegen in $[E]$: Jede Schleife ist darstellbar als Weg von v zu einem weiteren Knoten u und einem Weg von diesem Knoten zurück zu v. Wenn diese komplett in Λ liegen kann man durch sukzessives Entfernen von Rundtrips beide zu den Geodäten $\overrightarrow{vu}$, beziehungsweise $\overrightarrow{uv}$ umwandeln. Offenbar gilt aber $\overrightarrow{vu} = \overline{\overrightarrow{uv}}$, aus der Aneinanderreihung kann man durch sukzessives Entfernen von Rundtrips also wieder einen leeren Weg konstruieren. ■

4 Anhang

4.1 Literaturverzeichnis

1. Armstrong (1988): *Groups and Symmetry (Undergraduate Texts in Mathematics)*

2. Baer, Levi (1936): "Freie Produkte und ihre Untergruppen", *Compositio Mathematica 3*, Seiten 391–398

3. Läuchli (1962): "Auswahlaxiom in der Algebra", *Commentarii Mathematici Helvetici 37*, Seiten 1-18

4.2 Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, ganz oder in Teilen noch nicht als Prüfungsleistung vorgelegt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Sämtliche Stellen der Arbeit, die anderen Werke dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, habe ich durch Quellenangaben kenntlich gemacht. Dies gilt auch für die Abbildungen für die Quellen aus dem Internet.