

Aufteilungs- und Zuweisungsalgorithmen

Proseminar
im Wintersemester 2016/2017

Organisatorisches

Proseminar (2 CP)

- **schriftliche Ausarbeitung** zu einem ausgewählten Thema
 - 5 bis 7 Seiten, PDF-Format (\LaTeX)
 - in eigenen Worten (reine Übersetzung nicht ausreichend)
 - formal und anschaulich
 - vollständige Quellenangaben
- Rückmeldung zu einer anderen Ausarbeitung in Form eines *Peer-Reviews*
- erfolgreich absolviertes **Zwischengespräch**
 - Rückmeldung der Seminarleiterin
 - Vorstellung eines schlüssigen Vortragskonzepts
- 30-minütiger **Vortrag** des Themas (+10 min für Fragen)
- **Frage** zu mindestens einem Vortrag

Präsentationskurs (1 CP)

begleitend: **Do, 14–16 Uhr** in **OH 14, E 02** vom 20. Oktober bis zum 8. Dezember

Zeitplan

Beginn

- Mi 19.10.16 Einleitung, Themen
- Do 20.10.16 Beginn Präsentationskurs

Themenvergabe

- Thema auswählen bis 25.10 unter
<http://doodle.com/poll/37hfa3gxn4xdc7n>

Ausarbeitungsphase

- Mi 26.10.16 Besprechung
- Mi 02.11.16 & Mi 09.11.16 Fragen & Bearbeitung
- Di 15.11.16 erste Abgabe **Ausarbeitung**

— Rechtzeitig Vortragsplanung beginnen! —

Reviewphase

- Verteilung Reviews (per E-Mail)
- Mi 16.11.16 Besprechung
- Mi 23.11.16 Fragen & Bearbeitung
- Do 24.11.16 Abgabe **Reviews**
- Mi 30.11.16 Fragen & Bearbeitung
- Mi 30.11.16 zweite Abgabe **Ausarbeitung**

Zwischenbesprechung

- 8. Woche Einzeltermine
- Do 08.12.16 Ende Präsentationskurs

Vortragsphase und Ende

- 9.–15. Woche: Vorträge
- Feedback am Ende

Fragen?

- Informationen unter

`http://ls2-www.cs.uni-dortmund.de/~rey/wise1617proseminar`

- Abgaben und weitere Fragen an anja.rey@tu-dortmund.de
- Zwischengespräch und weitere Fragen in OH 14, 313
- weitere Fragen in Seminarterminen und Sprechstunden

Mo 13:30 Uhr bis 14:30 Uhr

Themenübersicht

Aufteilungsalgorithmen

- faire Aufteilung teilbarer Güter
- faire Aufteilung unteilbarer Güter

Zuweisungsalgorithmen

- das HOSPITALS-RESIDENTS-Problem
- das Mitbewohner-Problem
- Häuser zuordnen
- hedonische Spiele

Aufteilung und Zuweisung mit Präferenzen

Eine Instanz besteht aus

- **Agenten** (häufig zwei disjunkte Mengen)
- ordinalen **Präferenzen** über Teilmengen der Agenten
- anderen Bedingungen: Kapazitäten etc.

Ziel: faire oder optimale Aufteilung (Allocation) oder Zuweisung (Matching) finden

Wir unterscheiden zwischen

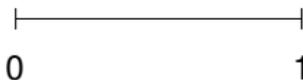
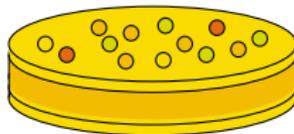
- **bipartiten** Zuweisungen mit **beidseitigen** Präferenzen
- **bipartiten** Aufteilungen mit **einseitigen** Präferenzen
 - Güter: teilbar (sharable, divisible) vs. nicht teilbar
- **nicht-bipartiten** Zuweisungen mit Präferenzen

Hier: Design und Analyse effizienter Algorithmen (oder ggf. Aussagen über Nicht-Existenz oder Härte solcher Algorithmen)

Aufteilung teilbarer Güter

Situation: inhomogener Kuchen

Ziel: jeder bekommt eine faire Portion



Definition 1

Eine Cake-Cutting-Instanz besteht aus einem **Kuchen** $[0, 1]$, **Spielern** $N = \{1, \dots, n\}$ und einer **Präferenzfunktion** $v_i : \{X \mid X \subseteq [0, 1]\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ für alle $i \in N$, sodass

- $v_i([a, a]) = 0 \forall a \in [0, 1]$ (**Nicht-Atomarität**);
- $v_i([0, 1]) = 1$ (**Normalisierung**);
- für jedes Teilintervall $X \subseteq [0, 1]$: $v_i(X) \geq 0$ (**Nicht-Negativität**);
- für jedes Teilintervall $[a, b] \subseteq [0, 1]$ und $\lambda: 0 \leq \lambda \leq 1$, existiert ein Punkt $c \in [a, b]$ mit $v_i([a, c]) = \lambda v_i([a, b])$ (**Teilbarkeit**);
- für zwei Teilintervalle $X, Y \subseteq [0, 1]$: $v_i(X) + v_i(Y) = v_i(X \cup Y)$ (**Additivität**).

Aufteilung teilbarer Güter

Beispiel: Cut & Choose

- $n = 2$
- Spieler 1 schneidet den Kuchen in zwei disjunkte Stücke X_1 und X_2 , sodass $v_1(X_1) = v_1(X_2)$ und $X_1 \cup X_2 = [0, 1]$.
- Spieler 2 wählt eine der beiden Stücke X_i mit $v_2(X_i) \geq v_2(X, j), j \neq i$.
- Spieler 1 bekommt das andere Stück.

weitere Protokolle, z. B. **Dubins–Spanier**, **Evan–Paz**, **Selfridge–Conway**

Fairness-Kriterien

- Proportionalität
- Neidfreiheit

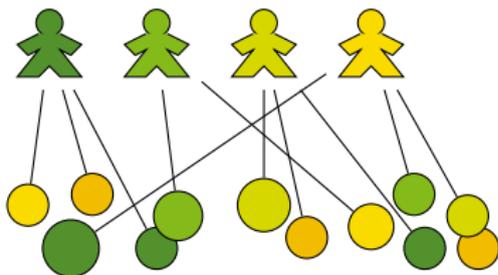
Thema 1

Thema 2

Aufteilung unteilbarer Güter

Situation: Objekte/Ressourcen mit unterschiedlichem Wert für Agenten

Ziel: jeder bekommt einen optimalen Anteil (1 : many)



Definition 2 (*MultiAgent Resource Allocation (MARA)*)

Eine MARA-Instanz besteht aus

- Agenten $N = \{1, \dots, n\}$
- Objekten $\mathcal{O} = \{o_1, \dots, o_p\}$
- Präferenzen der Agenten in N

unterschiedliche Darstellungen der Präferenzen:

- kardinale Präferenzen (Nutzenfunktion $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$)
- ordinale Präferenzen (z. B. **Ranking** über **Bündel** von Objekten)

Aufteilung unteilbarer Güter



Beispiel: das *Santa-Claus*-Problem

- MARA-Instanz mit kardinalen Präferenzen
- Nutzenfunktion u ist modular: für alle $S, T \subseteq \mathcal{O}$:
 $u(S \cup T) = u(S) + u(T) - u(S \cap T)$.
- Ziel: Nutzen für das unglücklichste Kind maximieren.

Fairness vs. Effizienz:

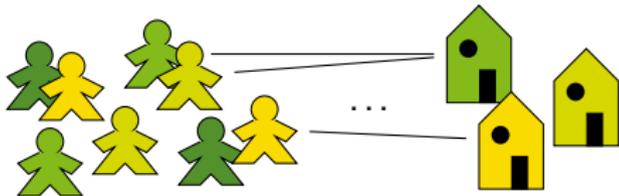
- Maxmin-Aufteilung
- Neidfreiheit
- Pareto-Effizienz

Thema 3

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Situation: beidseitige
Präferenzen

Ziel: (*many* : 1)-Zuweisung



Definition 3 (Das Hospital-Residents-Problem (HR))

Eine HR-Instanz besteht aus

- den disjunkten Agentenmengen $R = \{r_1, \dots, r_{n_1}\}$ und $H = \{h_1, \dots, h_{n_2}\}$
- $\forall h_j \in H$: Kapazität c_j
- $E \subseteq R \times H$ akzeptable Paare, $m = \|E\|$
- $\forall r_i \in R$: $A(r_i) = \{h_j \in H \mid (r_i, h_j) \in E\}$, $\forall h_j \in H$: $A(h_j) = \{r_i \in R \mid (r_i, h_j) \in E\}$
- $\forall a_k \in R \cup H$: strikte Präferenzliste über $A(k)$

M ist eine Zuweisung (*Matching*), wenn $|M(r_i)| \leq 1 \forall r_i \in R$ und $|M(h_j)| \leq c_j \forall h_j \in H$

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Seien I eine HR-Instanz und M eine Zuweisung in I .

$(r_i, h_j) \in E \setminus M$ blockiert M , falls

- Arzt r_i ist nicht zugewiesen oder bevorzugt h_j vor $M(r_i)$;
- Krankenhaus h_j ist unterbesetzt oder bevorzugt r_i vor mindestens einem Arzt in $M(h_j)$.

Eine Zuweisung M heißt stabil, falls kein Paar M blockiert.

Satz 4

Es gibt immer eine stabile Zuweisung.

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Gale–Shapley-Algorithmus (*resident oriented*, 1962)

Nobelpreis an L. Shapley
und A. Roth, 2012

Eingabe: HR-Instanz

Ausgabe: stabile Zuweisung M (optimal für Ärzte)

- 1 alle Ärzte frei
- 2 alle Krankenhäuser komplett unbesetzt
- 3 Solange (ein $r \in R$ frei) und (Präferenzliste von r nicht-leer):
- 4 $h \leftarrow$ erstes Krankenhaus auf Liste von r
- 5 Falls h vollständig besetzt:
- 6 $r' \leftarrow$ schlechtester Arzt, der bisher h zugewiesen ist
- 7 r' frei
- 8 Weise r zu h zu
- 9 Falls h vollständig besetzt:
- 10 $s' \leftarrow$ schlechtester Arzt, der bisher h zugewiesen ist
- 11 Für jeden Nachfolger s' von s auf Liste von h
- 12 Entferne s' und h aus deren jeweiligen Listen
- 13 Gib die Menge der zugewiesenen Paare zurück.

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Der oben angegebene Algorithmus gibt die eindeutige stabile Zuweisung M_a aus, die aus Sicht der **Ärzte** optimal ist.

Analog gibt es eine eindeutige stabile Zuweisung M_z , die aus Sicht der **Krankenhäuser** optimal ist.

Dazwischen kann es noch weitere stabile Zuweisungen geben, die jedes Krankenhaus mindestens so gut findet wie M_a und jeder Arzt mindestens so gut wie M_z .

Satz 5 (*Rural Hospitals*)

Für eine gegebene HR-Instanz gelten:

- In allen stabilen Zuweisungen bekommen die gleichen Ärzte ein Krankenhaus zugewiesen.
- Jedes Krankenhaus bekommt in allen stabilen Zuweisungen die gleiche Anzahl an Ärzten.
- Jedes Krankenhaus, das in einer stabilen Zuweisung unterbesetzt ist, bekommt in jeder stabilen Zuweisung die gleichen Ärzten zugewiesen.

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Varianten:

- stabiles Heiratsproblem (1:1)
- Indifferenzen in Präferenzen: schwache, starke und Super-Stabilität
- Berücksichtigung von Paaren
- Quoten: Mindestanzahlen und gemeinsame Kapazitäten
- (many:many)-Varianten: Zuweisung von Arbeitern und Firmen
- das Projekt-Zuweisungs-Problem
 - Kapazitäten von Projekten und Dozenten
 - Studierende und Dozenten haben Präferenzen über Teilmengen (Studierende)
 - Angebote von Dozenten
- tripartite Zuweisung
- ...

Thema 5

Thema 6

Thema 9

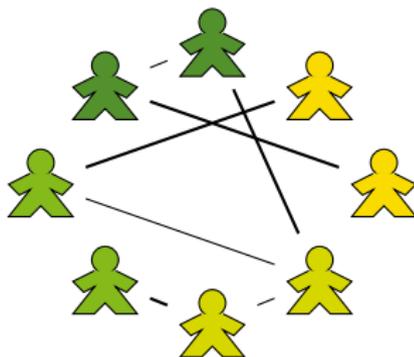
Thema 10

Thema 11

Stabiles Mitbewohnerproblem

Situation: nicht-bipartite,
möglicherweise unvollständige
Präferenzen über alle möglichen
Mitbewohner

Ziel: paarweise Zuweisung



Definition 6 (Das Stable-Roommates-Problem (SR))

Eine SR-Instanz besteht aus

- Agenten $A = \{a_1, \dots, a_n\}$
- $E = \{\{a_i, a_j\} \mid a_i, a_j \in A, i \neq j, \{a_i, a_j\} \text{ akzeptable Paare}\}$, $m = \|E\|$
- $\forall a_i \in A: A(a_i) = \{a_j \in E \mid \{a_i, a_j\} \in E\}$
- $\forall a_i \in A$: strikte Präferenzliste über $A(a_i)$

Stabiles Mitbewohnerproblem

Sei I eine SR-Instanz. $M \subseteq E$ ist eine **Zuweisung** in I , falls kein Agent zu mehr als einem anderen Agenten zugeordnet wird.

Ein Paar $(a_i, a_j) \in E \setminus M$ **blockiert** M , falls

- Agent a_i nicht zugewiesen ist oder a_j vor $M(a_i)$ bevorzugt;
- Agent a_j nicht zugewiesen ist oder a_i vor $M(a_j)$ bevorzugt.

M heißt **stabil**, falls kein Paar M blockiert.

I heißt **lösbar**, falls es eine stabile Zuweisung in I gibt.

Konzepte

- SR-Instanzen sind nicht immer lösbar.
- Es gibt immer eine stabile Partitionierung.
- fast-stabile Zuweisungen berücksichtigen geringe Kompromisse.

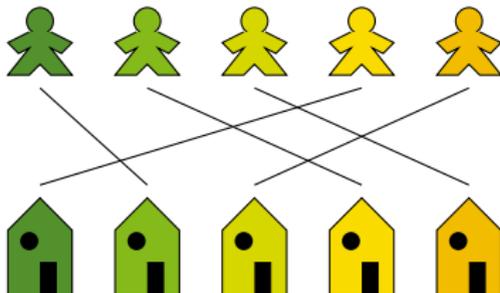
Thema 7

Thema 8

Zuweisung von Häusern

Situation: einseitige Präferenzen von Agenten über Häuser

Ziel: (1 : 1)-Zuweisung



Optimalitätskriterien

- Pareto-Optimalität
- Popularität
- profilbasierte Optimalität

Thema 4

Thema 13

Thema 14

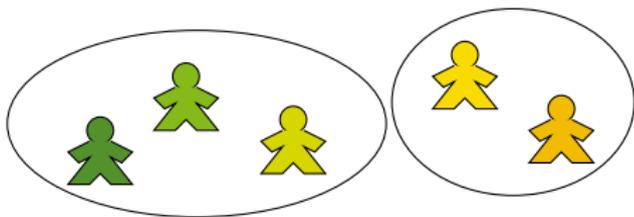
Thema 12

Varianten:

- *Housing Markets*: bestehende Zuweisung, individuelle Rationalität
- Gleichstände
- (*many:1*)-Verallgemeinerung: WG mit Kapazitäten

hedonische Spiele

Situation: Koalitionsbildung;
Zufriedenheit der Spieler hängt
nur von eigener Koalition ab.



Definition 7

Ein **hedonisches Spiel** (N, \succeq) besteht aus:

- endlicher Spielermenge $N = \{1, \dots, n\}$,
- Präferenzprofil $\succeq = (\succeq_1, \dots, \succeq_n)$
mit \succeq_i totaler Präferenzrelation über $\mathcal{N}_i = \{C \subseteq N \mid i \in C\}$ für $i \in N$.

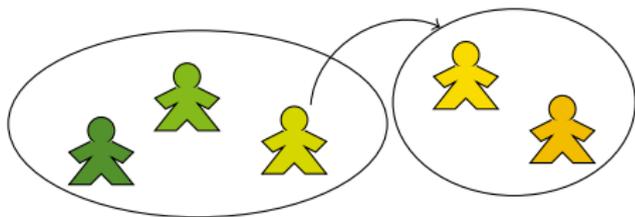
Also ist \succeq **reflexiv**, **transitiv**, nicht notwendigerweise **antisymmetrisch** und **total**.

Eine Teilmenge $C \subseteq N$ heißt **Koalition**.

Ein **Partitionierung** Γ von N heißt **Koalitionsstruktur**. $\Gamma(i) \in \Gamma$ mit $i \in \Gamma(i)$.

hedonische Spiele

Ziel: stabile Koalitionsstruktur
finden



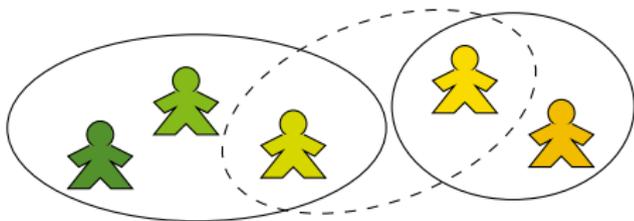
Definition 8

Sei ein hedonisches Spiel (N, \succeq) . Eine Koalitionsstruktur heißt

- Nash-stabil, wenn $\forall i \in N, \forall C \in \Gamma: \Gamma(i) \succeq C$.
- Varianten: individuell stabil und vertraglich individuell stabil

hedonische Spiele

Ziel: stabile Koalitionsstruktur
finden



Definition 8

Sei ein hedonisches Spiel (N, \succeq) . Eine Koalitionsstruktur heißt

- kernstabil, wenn es keine **blockierende** Koalition gibt,
d. h., $\forall C \subseteq N, \exists i \in C: \Gamma(i) \geq C$.

Darstellungen:

- individuell rational
- additiv separabel
- ...

Thema 15

Vortragstermine I

	Thema	Datum
1	Cake-Cutting – Proportionalität	14.12.2016
2	Cake-Cutting – Neidfreiheit	14.12.2016
3	Aufteilung unteilbarer Güter	21.12.2016
4	HA – Pareto-Optimalität	21.12.2016
	<i>— Ferien —</i>	
5	HR mit Indifferenzen – schwache Stabilität	11.01.2017
6	HR mit Indifferenzen – starke & Super-Stabilität	11.01.2017
7	SR – stabile Partitionierungen	18.01.2017
8	SR – fast-stabile Zuweisungen	18.01.2017

Vortragstermine II

	Thema	Datum
9	HR mit Paaren	25.01.2017
10	HR mit Quoten	25.01.2017
11	Das Projekt-Zuweisungs-Problem	01.02.2017
12	HA mit Kapazitäten	01.02.2017
13	HA – Popularität	02.02.2017
14	HA – profilbasierte Optimalität	08.02.2017
15	Koalitionsbildung in hedonischen Spielen	08.02.2017

Literatur



F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang und A. Procaccia, Editoren.
Handbook of Computational Social Choice.
Cambridge University Press, 2016.



D. Gusfield und R. Irving
The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms.
MIT Press, 1989.



D. Knuth.
Stable Marriage and its Relation to Other Combinatorial Problems.
volume 10 of CRM Proceedings and Lecture Notes, American Mathematical Society,
1997. Original: Mariages Stables, Les Presses de L' Université de 446 Montreal, 1976.



D. Manlove
Algorithmics Of Matching Under Preferences.
Volume 2 of Theoretical computer science. World Scientific Publishing, 2013.

... und jede Menge Referenzen darin.

Aufteilungs- und Zuweisungsalgorithmen

Proseminar
im Wintersemester 2016/2017

Zeitplan

Beginn

- Mi 19.10.16 Einleitung, Themen
- Do 20.10.16 Beginn Präsentationskurs

Themenvergabe

- Thema auswählen bis 25.10 unter
<http://doodle.com/poll/37hfa3gxn4xdc7n>

Ausarbeitungsphase

- Mi 26.10.16 Besprechung
- Mi 02.11.16 & Mi 09.11.16 Fragen & Bearbeitung
- Di 15.11.16 erste Abgabe **Ausarbeitung**

— Rechtzeitig Vortragsplanung beginnen! —

Reviewphase

- Verteilung Reviews (per E-Mail)
- Mi 16.11.16 Besprechung
- Mi 23.11.16 Fragen & Bearbeitung
- Do 24.11.16 Abgabe **Reviews**
- Mi 30.11.16 Fragen & Bearbeitung
- Mi 30.11.16 zweite Abgabe **Ausarbeitung**

Zwischenbesprechung

- 8. Woche Einzeltermine
- Do 08.12.16 Ende Präsentationskurs

Vortragsphase und Ende

- 9.–15. Woche: Vorträge
- Feedback am Ende

Vortragstermine Update I

	Thema	Datum
1	Cake-Cutting – Proportionalität	14.12.2016
2	Cake-Cutting – Neidfreiheit	14.12.2016
3	Aufteilung unteilbarer Güter	21.12.2016
4	HA – Pareto-Optimalität	21.12.2016
	— <i>Ferien</i> —	
5	HR mit Indifferenzen – schwache Stabilität	11.01.2017
6	HR mit Indifferenzen – starke & Super-Stabilität	11.01.2017
7	SR – stabile Partitionierungen	18.01.2017
8	SR – fast-stabile Zuweisungen	18.01.2017

Vortragstermine Update II

	Thema	Datum
9	HR mit Paaren	25.01.2017
10	HR mit Quoten	25.01.2017
11	Das Projekt-Zuweisungs-Problem	25.01.2017
11	Das Projekt-Zuweisungs-Problem	01.02.2017
12	HA mit Kapazitäten	01.02.2017
13	HA – Popularität	02.02.2017
15	Koalitionsbildung in hedonischen Spielen	01.02.2017
14	HA – profilbasierte Optimalität	08.02.2017
15	Koalitionsbildung in hedonischen Spielen	08.02.2017

Anforderungen Ausarbeitung

Format & Struktur

- 5–7 A4-Seiten, PDF-Format, \LaTeX verwenden
- sinnvoll strukturieren (Titel, Einleitung, Grundlagen, Hauptteil, Schluss)

Inhalt

- Definitionen und Kernaussagen herausfiltern
- in eigenen Worten wiedergeben (reine Übersetzung nicht ausreichend)
- auf eigene Beispiele übertragen, Thema daran veranschaulichen
- Quellen angemessen zitieren (konsistent!)

Buch: Autor, Titel, Verlag, Erscheinungsjahr, ggf. Auflage

Buchbeitrag: Autor, Titel, Buchtitel, Seiten, Erscheinungsjahr, ggf. Herausgeber, Verlag

Fachzeitschrift: Autor, Titel, Zeitschrift, Band und Nummer, Seiten, Erscheinungsjahr

(Wikipedia) *ok zum Nachgucken oder für Bilderquellen*

Bewertungskriterien

- 1 Lesbarkeit
(Struktur, Länge, Sprache, Verständlichkeit, Verknüpfungen)
- 2 technische Qualität
(Definitionen, Anschaulichkeit, Korrektheit, Genauigkeit)
- 3 Referenzen und Eigenanteil
(Quellenangaben, Literaturverzeichnis, eigene Formulierungen)

Aufteilungs- und Zuweisungsalgorithmen

Proseminar
im Wintersemester 2016/2017

Zeitplan

Beginn

- Mi 19.10.16 Einleitung, Themen
- Do 20.10.16 Beginn Präsentationskurs

Themenvergabe

- Thema auswählen bis 25.10 unter
<http://doodle.com/poll/37hfa3gxn4xdc7n>

Ausarbeitungsphase

- Mi 26.10.16 Besprechung
- Mi 02.11.16 & Mi 09.11.16 Fragen & Bearbeitung
- Di 15.11.16 erste Abgabe Ausarbeitung

— Rechtzeitig Vortragsplanung beginnen! —

Reviewphase

- Verteilung Reviews (per E-Mail)
- Mi 16.11.16 Besprechung
- Mi 23.11.16 Fragen & Bearbeitung
- Do 24.11.16 Abgabe **Reviews**
- Mi 30.11.16 Fragen & Bearbeitung
- Mi 30.11.16 zweite Abgabe Ausarbeitung

Zwischenbesprechung

- 8. Woche Einzeltermine
- Do 08.12.16 Ende Präsentationskurs

Vortragsphase und Ende

- 9.–15. Woche: Vorträge
- Feedback am Ende

Reviewform

Thema zusammenfassen

- Worum geht es in der Ausarbeitung?
- zwei bis drei Sätze

Bewertung

- zu jedem Kriterium 1–5 Punkte vergeben
 - 5 hervorragend, (fast) nichts auszusetzen
 - 4 gut, fast alles erfüllt, an wenigen Stellen verbesserungswürdig
 - 3 mittelmäßig, Kriterien halbwegs erfüllt, ein paar Mängel
 - 2 verbesserungswürdig, wenige gute Aspekte
 - 1 reicht nicht aus, viele Fehler
- zu jedem Kriterium eine kurze Begründung formulieren
- *Minor Issues*: in Stichpunkten ausgewählte Details festhalten (positive Details, Kritikpunkte, Fehlerdetails)

Reviewform

Bewertungskriterien

- 1 Lesbarkeit
(Struktur, Verknüpfungen, Länge, Sprache)
- 2 technische Qualität
(Definitionen, Anschaulichkeit, Korrektheit)
- 3 Referenzen und Eigenanteil
(Quellenangaben, Literaturverzeichnis, Eigenanteil)
- 4 Gesamtbewertung

weitere Aspekte

- *Confidence*: Erfahrung mit dem Thema einschätzen
- Zusätzliche Angaben, die nicht weitergegeben werden

Reviewform

WICHTIG

- Feedback-Regeln einhalten: sachliche Bewertung aus eigener Perspektive, positive und konstruktive Kritik
- Beurteilung hat keine negative Auswirkung auf Bewertung
- Rückmeldung nutzen zur Überarbeitung!
- *single blind* (Reviewer nicht bekannt)
- jeder erhält sein Review und ein separates Feedback im Zwischengespräch

Ablauf der Vorträge

Vortrag

- 30 Minuten Präsentation des Themas
- Folien per E-Mail schicken, auf USB-Stick mitbringen oder eigenes Notebook (vorher testen!)
- weitere benötigte Materialien (Whiteboardmarker, Kopien o. Ä.) rechtzeitig ankündigen

Fragen & Diskussion

- bis zu 15 Minuten Zeit für Fragen
- jeder stellt eine Frage zu mindestens einem Vortrag
- Ausarbeitungen werden zur Verfügung gestellt (Passwort)
– bitte Bescheid geben, falls nicht einverstanden