technische universität dortmund

Beate Bollig, Marc Gillé, Jens Lechner
Lehrstuhl 2, Fakultät für Informatik
Sommersemester 2011

TIfAI Übung – Blatt 4

Ausgabedatum: 26.4.2011 — Abgabedatum: 2.5.2011, 14:00 Uhr

Aufgabe 4.1: Turingreduktionen, Matchings

Kurzaufgabe (1 Punkt):

Erkläre anschaulich das Konzept der Turing-Reduktion. Wie kann man mit Hilfe der Turingreduktion untere Schranken für die algorithmische Komplexität von Problemen beweisen?

Hauptaufgabe (4 Punkte):

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heißt *Matching*, wenn je zwei verschiedene Kanten des Matchings keinen gemeinsamen inzidenten Knoten haben. Ein Matching M heißt *perfektes Matching*, wenn jeder Knoten von G zu einer Matching-Kante aus M inzident ist. Wir betrachten folgende Optimierungsprobleme:

1. Kardinalitätsmaximales Matching (MaxCard-M)
   Eingabe: Ungerichteter Graph G.
   Gesucht: Kardinalitätsmaximales Matching M, d.h. für alle Matchings M' gilt $|M| \geq |M'|$.

2. Gewichtmaximales Matching (MaxWeight-M)
   Eingabe: Ungerichteter Graph G und Kantengewichte $c : E \to \mathbb{R}$.
   Gesucht: Matching M mit $\sum_{e \in M} c(e)$ maximal, d.h. für alle Matchings M' gilt $\sum_{e \in M} c(e) \geq \sum_{e \in M'} c(e)$.

3. Perfektes Matching mit maximalem Gewicht (MaxWeight-PM)
   Eingabe: Ungerichteter Graph G mit Kantengewichte $c : E \to \mathbb{R}$.
   Gesucht: Perfektes Matching PM mit $\sum_{e \in PM} c(e)$ maximal, d.h. für alle perfekte Matchings PM' gilt $\sum_{e \in PM} c(e) \geq \sum_{e \in PM'} c(e)$.

4. Perfektes Matching mit minimalen Gewicht (MinWeight-PM)
   Eingabe: Ungerichteter Graph G mit Kantengewichte $c : E \to \mathbb{R}$.
   Gesucht: Perfektes Matching PM mit $\sum_{e \in PM} c(e)$ minimal, d.h. für alle perfekte Matchings PM' gilt $\sum_{e \in PM} c(e) \leq \sum_{e \in PM'} c(e)$.

Im folgenden können wir davon ausgehen, dass der Eingabe-Graph G eine gerade Anzahl von Knoten hat.

1. Zeige, dass MinWeight-PM $=_T$ MaxWeight-M.

2. Zeige, dass MaxCard-M $\leq_T$ MaxWeight-PM.

Aufgabe 4.2: Turingreduktionen von verwandten Problemen

Kurzaufgabe (1 Punkt):

Sei $m \in \mathbb{Z}$. Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen *kongruent modulo* m (Notation: $a \equiv b \mod m$), wenn m die Differenz $b - a$ teilt, d.h. es ein existiert ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $b - a = c \cdot m$. Beweise, dass die Kongruenzrelation $\cdot \equiv \cdot \mod m$ eine Äquivalenzrelation ist.

Hauptaufgabe (4 Punkte):

Betrachte die folgenden Entscheidungsprobleme:

1. Hamiltonin Path (HP)
   Eingabe: Ungerichteter Graph G.
   Frage: Enthält G einen Pfad, der jeden Knoten genau einmal besucht?

2. Bounded Degree Spanningtree (BST)
   Eingabe: Ungerichteter Graph G und $d \in \mathbb{N}$.
   Frage: Enthält G einen Spannbaum, dessen Knoten höchstens Grad d haben?

Das Entscheidungsproblem HC ist aus der Vorlesung bekannt.

Zeige, dass $HC =_T HP \leq_T BST$ gilt.

Aufgabe 4.3: Turingreduktion nicht verwandter Probleme

Kurzaufgabe (1 Punkt):

Erläutere das Konzept der Reduktion mit verbundenen Komponenten an Hand des Beweises von 3-SAT $\leq_T$ IS_{dec}.

Hauptaufgabe (4 Punkte):

Betrachte die folgenden Optimierungsprobleme:

1. Hitting Set (HS)
   Eingabe: Grundmenge X, Menge C von Teilmengen von X.
   Gesucht: Teilmenge $X' \subseteq X$ mit minimaler Kardinalität, so dass $X' \cap C' \neq \emptyset$ für alle $C' \in C$ gilt. D.h. es gilt $|X'| \leq |X''|$ für alle $X'' \subseteq X$, für die $X'' \cap C' \neq \emptyset$ für alle $C' \in C$ gilt.

2. 0-1 Integer Linear Programming (0-1-ILP)
   Eingabe: $n, m \in \mathbb{N}$, Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ und Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$
   Gesucht: Vektor $x \in \{0,1\}^n$, so dass $\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i$ minimal ist, d.h. für alle $x' \in \{0,1\}^n$ ist $\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \leq \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x'_i$, und $Ax \geq b$ gilt, wobei $v \geq w$ für zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^m$ gilt, wenn $v_i \geq w_i$ für alle $1 \leq i \leq m$.

Zeige, dass HS $\leq_T$ 0-1-ILP gilt.

Testfragen:

1. Kennst du ein Problem A, für das $A_{dec} =_T A_{eval} =_T A_{opt}$ gilt? Begründe kurz, warum die Problemvarianten von A turingäquivalent sind.

2. Wie funktioniert die Reduktion von DHC auf HC?

3. Kennst du eine Beispielreduktion, die auf Restriktion basiert?