technische universität
dortmund

Beate Bollig, Marc Gillé, Jens Lechner
Lehrstuhl 2, Fakultät für Informatik
Sommersemester 2011

TIfAI Übung – Blatt 11

Ausgabedatum: 14.6.2011 — Abgabedatum: 20.6.2011, 14:00 Uhr

Aufgabe 11.1: Produktautomaten

Kurzaufgabe (1 Punkte):

Beschreibe kurz die Konstruktion des Produktautomaten von zwei DFAs. Warum geht die Produktautomatenkonstruktion zur symmetrischen Differenz für NFAs schief (Folie 421)?

Hauptaufgabe (4 Punkte):

1. Übertrage die Konstruktion von Produktautomaten zum Durchschnitt regulärer Sprachen (siehe Folie 418) auf NFAs.
2. Für ein Wort $w = w_1 \dots w_n$ und eine Menge $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ bezeichne w_S das Wort, das aus w durch Streichen aller Zeichen w_i mit $i \notin S$ entsteht, und $w_{\overline{S}}$ sei das Wort, das durch Streichen aller Zeichen w_i mit $i \in S$ entsteht. Für $S = \{2, 3\}$ und $w = 10110$ ist zum Beispiel $w_S = 01$ und $w_{\overline{S}} = 110$.

   Dann sei für zwei Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$

   $$\mathrm{MIX}(L_1, L_2) = \{w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^* \mid \exists S \subseteq \{1, \dots, n\} : w_S \in L_1 \wedge w_{\overline{S}} \in L_2\}\ .$$

   Beweise, dass falls L_1 und L_2 regulär sind, auch $\mathrm{MIX}(L_1, L_2)$ regulär ist.

   Tipp: Konstruiere einen NFA für $\mathrm{MIX}(L_1, L_2)$.

Aufgabe 11.2: Reguläre Ausdrücke

Kurzaufgabe (1 Punkte):

Beschreibe die Idee, wie ein regulärer Ausdruck aus einem DFA gewonnen wird.

Hauptaufgabe (4 Punkte):

1. Gib reguläre Ausdrücke für die folgenden Sprachen über $\Sigma = \{0, 1\}$ an:
   (a) $L_1 = \{w \mid w \text{ enthält nicht das Wort } 010\}$
   (b) $L_2 = \{w \mid \#_1(w) \text{ ist durch drei teilbar und } \#_0(w) \text{ ist gerade}\}$
2. Benutze den in der Vorlesung verwendeten Umformungsalgorithmus (Folie 441ff), um folgenden DFA in einen regulären Ausdruck zu transformieren. Dabei ist

   $A = (\{1, 2, 3\}, \{0, 1\}, 1, \delta, \{1\})$ mit $\delta(q, i)$ wie folgt:

$q\backslash i$	0	1
1	2	3
2	1	3
3	2	1

Aufgabe 11.3: Weitere Abschlusseigenschaften

Kurzaufgabe (1 Punkte):

Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei PRE(L) die Menge aller Präfixe von Wörtern aus L:

$$\mathrm{PRE}(L) = \{w \mid \exists t \in \Sigma^* : wt \in L\}$$

Beweise, dass reguläre Sprachen gegen Präfixbildung abgeschlossen sind, also dass für reguläre Sprachen L auch PRE(L) regulär ist.

Hauptaufgabe (4 Punkte):

1. Für ein Wort w bezeichnet w^R die Umkehrung des Wortes, z.B ist $\texttt{leben}^R = \texttt{nebel}$. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir die Umkehrung L^R der Sprache als

   $$L^R = \{w \in \Sigma^* \mid w^R \in L\} .$$

   Beweise, dass reguläre Sprachen gegen Umkehrung abgeschlossen sind, also dass für reguläre Sprachen L auch L^R regulär ist.

2. Seien Σ und Γ Alphabete. Ein *Homomorphismus* ist eine Abbildung $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$, so dass für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt

   $$\begin{aligned} h(xy) &= h(x)h(y) \\ h(\epsilon) &= \epsilon. \end{aligned}$$

   Jeder Homomorphismus ist eindeutig durch seine Werte auf Σ bestimmt. Für eine Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ ist $h(L) = \{h(x) \mid x \in L\} \subseteq \Gamma^*$ das homomorphe Bild von L unter h.

   Zeige, dass reguläre Sprachen unter homomorphen Bildern abgeschlossen sind, d.h. wenn $L \subseteq \Sigma^*$ regulär ist, dann ist auch $h(L) \subseteq \Gamma^*$ regulär.

Tipp: Ihr kennt verschiedene Darstellungsformen für reguläre Sprachen. Eine günstige Auswahl der Darstellungsform könnte die Aufgaben eventuell vereinfachen.

Testfragen:

1. Unter welchen Operationen sind die regulären Sprachen abgeschlossen?
2. Wie sind reguläre Ausdrücke definiert?
3. Warum haben wir das Vollständigkeitsproblem für NFAs untersucht?