technische universität dortmund

Beate Bollig, Marc Gillé
Lehrstuhl 2, Fakultät für Informatik
Sommersemester 2011

TIfAI Übung – Blatt 1

Ausgabedatum: 5.4.2011 — Abgabedatum: *Abgabe ist nicht erforderlich*

Im Laufe der Vorlesung werden wir Randomisierung als ein wichtiges Konzept kennenlernen. Mit Hilfe des Präsenzblatts geben wir Euch eine kleine Einführung in das Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie, um den Vorlesungsinhalten, in denen Randomisierung benutzt wird, besser folgen zu können. Das Buch „*Komplexitätstheorie: Grenzen der Effizienz von Algorithmen*“ enthält im Anhang (A.2, S. 299-310) ein Kapitel über Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Aufgabe 1.1: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Kurzaufgabe (*unbewertet*):

Was versteht man unter den folgenden Begriffen: *Wahrscheinlichkeitsraum*, *Ergebnismenge*, *Elementarereignis*, *Wahrscheinlichkeitsverteilung*?

Hauptaufgabe (*unbewertet*):

1. Betrachte folgendes Zufallsexperiment:
   Wir werfen eine ideale Münze viermal (d.h. jeder mögliche Ausgang des Experiments hat die gleiche Wahrscheinlichkeit). Gib einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, der dieses Zufallsexperiment beschreiben soll, und berechne die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

   (a) Es wird genau dreimal Zahl geworfen.

   (b) Es wird höchstens zweimal Zahl geworfen.

   (c) Es wird mindestens einmal Kopf geworfen.

2. Sei (Ω, Prob) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von zwei Ereignissen A und B mit $\mathrm{Prob}\,[B] > 0$ ist definiert durch

   $$\mathrm{Prob}\,[A \mid B] = \frac{\mathrm{Prob}\,[A \cap B]}{\mathrm{Prob}\,[B]}.$$

   D.h. $A \mid B$ („A gegeben B“) bezeichnet das Ereignis, dass Ereignis A eintritt, wenn wir bereits wissen, dass B auf jeden Fall eingetreten ist.

   Angenommen bei der Geburt eines Kindes sind beide Geschlechter gleich wahrscheinlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Familie mit zwei Kindern beide Kinder Mädchen sind, wenn wir bereits erfahren haben, dass es sich bei einem Kind um ein Mädchen handelt?

Aufgabe 1.2: Unabhängigkeit von Ereignissen

Kurzaufgabe (*unbewertet*):

Beschreibe den Zusammenhang zwischen der Unabhängigkeit von zwei Ereignissen A und B und der bedingten Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

Hauptaufgabe (*unbewertet*):

Sei A ein deterministischer Algorithmus, der bei Eingabe $x \in X$ einen Wert $A(x) \in \{0, 1\}$ berechnet. Angenommen wir haben einen randomisierten Algorithmus B, der für alle Eingaben $x \in X$ folgende Eigenschaften hat:

$$\begin{aligned} \text{Falls } A(x) = 1: \quad & \text{Prob}\left[B(x) = 1\right] = 1. \\ \text{Falls } A(x) = 0: \quad & \text{Prob}\left[B(x) = 0\right] = 1/5. \end{aligned}$$

1. Untersuche folgenden Algorithmus B' bei Eingabe $x \in X$:

   Führe zwei unabhängige Durchläufe von B auf x durch. Falls ein Durchlauf das Ergebnis 0 liefert, gib 0 aus und sonst 1.

   Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten $\text{Prob}\left[B'(x) = 1\right]$ für eine Eingabe x mit $A(x) = 1$ und $\text{Prob}\left[B'(x) = 0\right]$ für eine Eingabe x mit $A(x) = 0$?

2. Sei $\delta > 1$. Modifiziere den Algorithmus B', so dass $\text{Prob}\left[B'(x) = 0\right] = 1/\delta$ für Eingaben x mit $A(x) = 0$ gilt.

Aufgabe 1.3: Zufallsvariablen und Geometrische Verteilung

Kurzaufgabe (*unbewertet*):

Was versteht man unter einer *Zufallsvariablen*? Wie ist der *Erwartungswert* einer Zufallsvariablen definiert? Was versteht man unter der *Linearität des Erwartungswertes*?

Hauptaufgabe (*unbewertet*):

In dieser Aufgabe wollen wir den Erwartungswert einer *geometrisch verteilten* Zufallsvariablen berechnen. Man nennt

$$E\left[Z \mid E\right] = \sum_{z \in Z(\Omega)} z \cdot \text{Prob}\left[Z = z \mid E\right]$$

den *bedingten Erwartungswert von Z unter der Bedingung E* für eine Zufallsvariable Z und einem Ereignis E über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Prob).

Angenommen wir haben ein Zufallsexperiment, dass mit Wahrscheinlichkeit p erfolgreich ist, und eine Zufallsvariable, die die Anzahl der Versuche bis zum ersten Erfolg angibt. Solch eine Zufallsvariable heißt geometrisch verteilt mit Parameter p.

1. Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable. Eine wichtige Beobachtung ist die sogenannte Gedächtnislosigkeit der geometrisch verteilten Zufallsvariable, d.h. für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt

   $$\text{Prob}\left[X > x + y \mid X > y\right] = \text{Prob}\left[X > x\right].$$

   Wir definieren die Zufallsvariable Y durch

   $$Y := \begin{cases} 0 & \text{falls } X > 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Zeige mit Hilfe der Gedächtnislosigkeit, dass

   $$E\left[X \mid Y = 0\right] = E\left[X\right] + 1.$$

2. Seien X und Y wie in der ersten Teilaufgabe definiert. Aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit folgt unmittelbar, dass

   $$E\left[X\right] = \sum_{y \in Y(\Omega)} \text{Prob}\left[Y = y\right] \cdot E\left[X \mid Y = y\right].$$

   Benutze diese Aussage zusammen mit dem Ergebnis aus der ersten Teilaufgabe, um $E\left[X\right] = 1/p$ zu zeigen.