technische universität dortmund

Christian Sohler, Melanie Schmidt
Lehrstuhl 2, Fakultät für Informatik
Wintersemester 2009/2010

AuD Übung – Präsenzübung 1

Ausgabedatum: 14.10.2009 — Besprechung: 21.10.2009

Aufgabe 1.1: Zulässigkeit und Beschränktheit linearer Programme

Gib notwendige und hinreichende Bedingungen an s und t an, so dass das folgende lineare Programm ...

1. ... mindestens eine optimale Lösung hat.
2. ... genau eine optimale Lösung hat.
3. ... keine zulässige Lösung hat.
4. ... unbeschränkt ist.

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & sx_1 + tx_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Aufgabe 1.2: Variationen von LPs

Die folgenden Teilaufgaben sollen zeigen, dass es verschiedene Varianten von LPs gibt, die sich in die Form

$$\begin{array}{rl} \max & c^t x \\ \text{unter} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

bringen lassen.

1. Gib an, wie man das folgende LP lösen kann, indem man zuerst ein LP in der oben angegebenen Form löst.

$$\begin{array}{rl} \min & c^t x \\ \text{unter} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

2. Die zulässigen Lösungen eines gegebenen linearen Programms seien statt durch Ungleichungen der Form $Ax \leq b$ durch eine Mischung verschiedener Ungleichungen und Gleichungen gegeben, genauer seien A_1, A_2, A_3 Matrizen, b_1, b_2, b_3 Spaltenvektoren und der zulässige Bereich sei die Menge $\{X \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x \geq b_2, A_2 x = b_2, A_3 x \geq b_3\}$. Stelle den zulässigen Bereich in der Form $\{X \in \mathbb{R}^n \mid A'x \leq b'\}$ dar.

3. Die Variablen in einem linearen Programm können auch unbeschränkt sein:

$$\begin{array}{rl} \max & c^t x \\ \text{unter} & Ax \leq b \\ & x \in R^d \end{array}$$

   Wie kann man das lineare Programm umformulieren, so dass alle Variablen nichtnegativ sind? Tipp: Hierzu müssen zusätzliche Variablen eingefügt werden.

4. Ist es auch möglich, ein lineares Programm mit *echten* Ungleichungen (d.h. Ungleichungen der Form $Ax < b$) in ein lineares Programm in der oben angegebenen Form umzuwandeln?

Aufgabe 1.3: LPs vs. ILPs

Gib ein Beispiel für ein lineares Programm, das keine ganzzahlige optimale Lösung besitzt, sondern nur eine fraktionale optimale Lösung.

Aufgabe 1.4: ILPs

Beim *Set Cover Problem* sind eine Menge U und m Teilmengen $S_i \subseteq U(1 \leq i \leq m)$ von U gegeben. Das Ziel ist es, Teilmengen auszuwählen, so dass jedes Element aus U in mindestens einer der ausgewählten Teilmengen enthalten ist. Dabei soll die Anzahl der ausgewählten Teilmengen minimiert werden. Wir suchen also das minimale k, so dass wir aus den vorgegebenen Teilmengen k Mengen auswählen können, die zusammen die gesamte Menge U überdecken. Formuliere dieses Problem als ILP.