technische universität dortmund

Christian Sohler, Melanie Schmidt
Lehrstuhl 2, Fakultät für Informatik
Wintersemester 2009/2010

AuD Übung – Blatt 4

Ausgabedatum: 25.11.2009 — Abgabedatum: 02.12.2009

Maximale Flüsse:

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Quelle $s \in V$ und Senke $t \in V$ sowie Kapazitäten $c : E \to \mathbb{R}^+$. In der Vorlesung haben wir das Problem, einen *maximalen Fluss* in G zu berechnen, modelliert. Dazu haben wir zuerst eine Kante von t nach s mit unendlicher Kapazität eingefügt. Dann haben wir für jede Kante (i, j) eine Variable f_{ij} eingeführt und das folgende LP aufgestellt:

$$
\begin{array}{llrcll}
(P) & \max & & f_{ts} & & \\
& \text{unter} & & f_{ij} \leq & c_{ij} & \forall\ [i,j\rangle \in E \setminus \{[t,s\rangle\} \\
& & \sum_{j:\,[j,i\rangle \in E} f_{ji} - \sum_{j:\,[i,j\rangle \in E} & f_{ij} \leq & 0 & \forall\ i \in V \\
& & & f_{ij} \geq & 0 & \forall\ [i,j\rangle \in E
\end{array}
$$

Aufgabe 4.1: LP-Formulierung für Max-Flow

Zeige, dass es gerechtfertigt ist, für die Flusserhaltung eine Ungleichung statt einer Gleichung zu verwenden, d.h. zeige die folgende Aussage: Aus

$$\sum_{j:\,[j,i\rangle \in E} f_{ji} - \sum_{j:\,[i,j\rangle \in E} f_{ij} \leq 0 \quad \forall i \in V$$

folgt

$$\sum_{j:\,[j,i\rangle \in E} f_{ji} - \sum_{j:\,[i,j\rangle \in E} f_{ij} = 0 \quad \forall i \in V.$$

Aufgabe 4.2: LP-Formulierung für Max-Flow

Stelle ein LP für MaxFlow auf, *ohne* eine Kante von t nach s einzufügen. Gib außerdem an, wie sich das duale Problem dadurch verändert.

Aufgabe 4.3: LP-Runden für SetCover

Algorithmus 2.2.4 aus der Vorlesung ist ein f-Approximationsalgorithmus für SetCover, wobei $f := \max_{x \in U} |\{S \mid X \in S\}|$ die maximale Anzahl an Teilmengen ist, die dasselbe Element enthalten. Wir suchen Beispiele, bei denen die Approximationsgüte erreicht wird, d.h. wo das mit Algorithmus 2.2.4 berechnete SetCover die f-fachen Kosten eines optimalen Covers hat.

1. Gib ein Beispiel an, bei dem das Universum vier Elemente enthält, T vier Teilmengen enthält und bei dem jedes Element aus U von maximal zwei Teilmengen überdeckt wird, d.h. $f = 2$. Außerdem soll es eine optimale fraktionale Lösung geben, die Algorithmus 2.2.4 berechnet haben könnte, und die zu einer ganzzahligen Lösung mit Wert $f \cdot \text{OPT}$ gerundet wird.

2. Gib ein Beispiel an, bei dem das Universum neun Elemente enthält, T sechs Teilmengen enthält und bei dem jedes Element aus U von maximal drei Teilmengen überdeckt wird, d.h. $f = 3$. Außerdem soll es eine optimale fraktionale Lösung geben, die Algorithmus 2.2.4 berechnet haben könnte, und die zu einer ganzzahligen Lösung mit Wert $f \cdot \mathrm{OPT}$ gerundet wird.

Aufgabe 4.4: Dualität und komplementärer Schlupf

Ist $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^t$ eine Optimallösung des folgenden linearen Programms?

$$\begin{array}{lrrrrrcl}
\max & 7x_1+ & 6x_2+ & 5x_3- & 2x_4+ & 3x_5 & & \\
\text{unter} & x_1+ & 3x_2+ & 5x_3- & 2x_4+ & 2x_5 & \leq & 4 \\
& 4x_1+ & 2x_2- & 2x_3+ & x_4+ & x_5 & \leq & 3 \\
& 2x_1+ & 4x_2+ & 4x_3- & 2x_4+ & 5x_5 & \leq & 5 \\
& 3x_1+ & x_2+ & 2x_3- & x_4- & 2x_5 & \leq & 1 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Hinweis: Beantworte die Frage mit Hilfe der Bedingungen der **Complementary Slackness**. Für jede Ungleichung von (P), die von x^* nicht mit Gleichheit erfüllt wird, folgt, dass die entsprechende Stelle der optimalen dualen Lösung y^* Null sein muss. Für jede Stelle von x^*, die Null ist, muss die entsprechende Ungleichung im dualen Programm von y^* mit Gleichheit erfüllt sein. Wie muss y^* dann aussehen?