technische universität dortmund

Christian Sohler, Melanie Schmidt
Lehrstuhl 2, Fakultät für Informatik
Wintersemester 2009/2010

AuD Übung – Blatt 3

Ausgabedatum: 12.11.2009 — Abgabedatum: 18.11.2009

Aufgabe 3.1: Simplex-Algorithmus

Im Simplex-Algorithmus benötigen wir in Fall 2 einen Index i^*, für den der Vektor u eine negative Komponente hat, d.h. $u_{i^*} < 0$. Wir wählen diesen Index (in der Vorlesung) als den kleinsten Index, für den $u_{i*} < 0$ gilt. Stattdessen könnte man i^* auch so wählen, dass $|u_{i^*}|$ maximal ist, in der Hoffnung, dass dadurch der Zielfunktionswert besonders stark steigt. Wir wollen in dieser Aufgabe sehen, welche Probleme durch eine solche Wahl eintreten können.

Dafür betrachten wir das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{rlllll}
\max & \frac{3}{4}x_1 & -20x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & -6x_4 & \\
\text{unter} & \frac{1}{4}x_1 & -8x_2 & -x_3 & +9x_4 & \leq 0 \\
& \frac{1}{2}x_1 & -12x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +3x_4 & \leq 0 \\
& & & x_3 & & \leq 1 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Wende den Simplex-Algorithmus auf dieses LP an, wähle aber i^* so, dass $u_{i^*} < 0$ und $|u_{i^*}| = \max\{|u_i| \mid u_i < 0\}$ gilt, d.h. i^* ist der Index der Komponente von u, die den größten negativen Wert hat. Abgesehen von dieser Änderung verwende den Algorithmus aus der Vorlesung, d.h. auch j^* wird wie in der Vorlesung gewählt.

Führe genau sechs Iterationen des abgewandelten Simplexalgorithmus aus. Was geschieht?

Hinweis: Die Beschreibung des Simplex-Algorithmus aus der Vorlesung geht von einem LP *ohne* die Bedingungen $x_i \geq 0$ aus. Daher muss das Ungleichungssystem $Ax \leq b$ diese Ungleichungen enthalten, d.h. für das obige Beispiel ist

$$
A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -8 & -1 & 9 \\ \frac{1}{2} & -12 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe 3.2: Farkas' Lemma und Dualität

Sei (P) das folgende lineare Program

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \max & c^t x \\
& \text{unter} & Ax \leq b
\end{array}
$$

und (D) das zugehörige duale Programm

$$\begin{array}{lll} (D) & \min & b^t y \\ & \text{unter} & y^t A = c^t \\ & & y \geq 0 \end{array}$$

Zeige die folgende Aussage: Wenn (P) zulässig ist und eine (endliche) optimale Lösung $x^* \in \mathbb{R}^d$ besitzt, dann ist auch (D) zulässig und besitzt eine (endliche) optimale Lösung $y^* \in R^m$.

Hinweis 1: Der Dualitätssatz besagt: Wenn (P) und (D) beide zulässige Lösungen besitzen, d.h. wenn $\{x \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset$ und $\{y \mid y^t A = c, y \geq 0\} \neq \emptyset\}$ gilt, dann sind die optimalen Lösungen von (P) und (D) gleich. Das ist eine andere Aussage als die, die wir zeigen wollen!

Hinweis 2: Das Farkas' Lemma besagt:

$$\begin{array}{c} \exists x \text{ mit: } Ax \leq b \\ \Leftrightarrow \\ \forall y \geq 0 \text{ mit } y^t A = 0 \text{ gilt } y^t b \geq 0 \end{array}$$

Das bedeutet, dass immer *genau eine* der folgenden Aussagen gilt:

$$\begin{array}{rl} \textit{Entweder} & \exists x \text{ mit: } Ax \leq b \\ \textit{oder} & \exists y \geq 0 \text{ mit } y^t A = 0, \text{ für das gilt: } y^t b < 0 \end{array}$$

Diese Formulierung des Farkas' Lemma benötigt man für den Beweis.

Aufgabe 3.3: Ellipsoidmethode

Bei der allgemeinen Berechnung des neuen Ellipsoiden E' aus dem Ellipsoid E haben wir in der Vorlesung hergeleitet, wie man das Zentrum z' von E' direkt berechnen kann. Für die Matrix B', die man für die Bestimmung von E' ebenfalls benötigt, haben wir die Formel nur angegeben (und nicht bewiesen). Leite die Formel für B' analog zur Formel für z' her.

Aufgabe 3.4: Ellipsoidmethode

Im Spezialfall, dass E die Einheitskugel $K(0,1)$ ist, haben wir in der Vorlesung hergeleitet, wie E' aussehen muss. Es bleibt aber noch zu zeigen, dass E' tatsächlich die untere Halbkugel enthält. Zeige also die folgende Aussage:

Alle $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit $x^t x \leq 1$ und $x_1 \leq 0$ erfüllen auch $(x - \hat{z})\Lambda(x - \hat{z}) \leq 1$, wobei wir $\hat{z}$ und Λ für $-1 \leq t \leq 0$ folgendermaßen definieren:

$$\hat{z} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}, \; \frac{1}{a^2} = \frac{1}{(1+t)^2}, \; \frac{1}{b^2} = \frac{1+2t}{(1+t)^2}$$