technische universität dortmund

Christian Sohler, Melanie Schmidt
Lehrstuhl 2, Fakultät für Informatik
Wintersemester 2009/2010

AuD Übung – Blatt 2

Ausgabedatum: 28.10.2009 — Abgabedatum: 04.11.2009

Aufgabe 2.1: Variante des Farkas' Lemma

Es sei A eine $(m \times d)$-Matrix und b ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^m$. Wir definieren A' durch $A' = [I \quad A \quad (-A)]$, wobei I die $(m \times m)$-Einheitsmatrix ist. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Das Ungleichungssystem $Ax \leq b$ hat eine Lösung $x \in R^d$.
2. Das Gleichungssystem $A'x' = b$ hat eine nicht negative Lösung $x' \in R^{2d+m}$ (d.h. $x' \geq 0$).

Aufgabe 2.2: Fundamentalsatz über lineare Ungleichungen

Im Beweis des Fundamentalsatzes über lineare Ungleichungen haben wir einen Algorithmus kennengelernt, mit dem man einen Vektor b entweder als nicht negative Linearkombination vorgegebener Vektoren $a_1, \ldots, a_m$ darstellen kann oder mit dem man eine Hyperebene H findet, so dass alle a_i auf der einen und b auf der anderen Seite von H liegen. Wende diesen Algorithmus auf das folgende Beispiel an:

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1) \\ a_2 &= (2, 2, 1) \\ a_3 &= (1, -1, 1) \\ a_4 &= (4, -1, 1) \\ a_5 &= (4, 1, 1) \\ b &= (4, 2, 1) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3: Separationssatz

Seien $C, D \subseteq \mathbb{R}^d$ konvexe und kompakte Mengen mit $C \cap D = \emptyset$, d.h. der Schnitt der Mengen ist leer. Dann nimmt die Distanzfunktion $(x, y) \rightarrow ||x - y||_2$ auf $C \times D$ ein Minimum an. Wir wählen $p \in C$ und $q \in D$ so, dass ihre Distanz $||p - q||_2$ gerade dem minimalen Wert entspricht. Sei m der Mittelpunkt der Strecke pq und $n := p - q$ der Vektor von q nach p. Dann wird die Hyperebene, die zwischen p und q verläuft und senkrecht auf der Strecke pq steht, durch $H := \{x \in \mathbb{R}^d \mid (x^t - m^t)n = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x^t n = m^t\}$ beschrieben. Zeige, dass H die Mengen C und D nicht schneidet.

Aufgabe 2.4: Affine Hülle

Die affine Hülle einer Menge von Vektoren $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^d$ ist die kleinste affine Menge, die alle a_i enthält. Zeige, dass das genau der Menge aller affinen Kombinationen der Vektoren $a_1, \ldots, a_m$, also der Menge $\{x \in \mathbb{R}^d \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$, entspricht.