technische universität dortmund

SoSe 2017

C. Sohler
A. Krivošija, A. Rey, H. Sandvoß

DAP2 – Präsenzübung 14

Besprechung: 26.07.2017 — 28.07.2017

Präsenzaufgabe 14.1: (Knotengrade und Eulerkreise)

a) Zeigen Sie, dass es in einem ungerichteten Graph mit einer ungeraden Knotenanzahl immer einen Knoten mit geradem Knotengrad gibt.

b) Ein *Eulerkreis* ist ein Kreis, der alle Kanten eines Graphen genau einmal besucht. Finden Sie eine Bedingung, die ein ungerichteter, zusammenhängender Graph genau dann erfüllt, wenn er einen Eulerkreis besitzt. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Ein ungerichteter Graph heißt *regulär*, wenn jeder Knoten den gleichen Knotengrad hat. Zeigen Sie mit Hilfe der Aussagen aus den Aufgabenteilen a) und b), dass ein zusammenhängender, regulärer Graph mit einer ungeraden Knotenanzahl immer einen Eulerkreis besitzt.

Präsenzaufgabe 14.2: (Approximationsalgorithmus für Matchings)

Ein *Matching* M in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge der Kantenmenge, wobei keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Knoten haben. Ein Matching M heißt *Maximum-Matching*, falls es kein Matching M' mit $|M'| > |M|$ gibt. Mit $\textsc{Match}(G) = |M|$ bezeichnen wir die Größe eines Maximum-Matchings in G.

Sie haben in der Vorlesung bereits das Knotenübderdeckungsproblem kennengelernt. Zur Erinnerung: Eine Menge $U \subseteq V$ heißt Knotenüberdeckung, wenn für jede Kante $(u, v) \in E$ mindestens einer der Endpunkte u, v in U enthalten ist. Mit $\textsc{Cover}(G) = |U|$ bezeichnen wir die Größe einer minimalen Knotenüberdeckung in G.

Ein Matching M heißt *inklusionsmaximal*, falls es keine Kante $e \in E \setminus M$ gibt, so dass $M \cup \{e\}$ ein gültiges Matching ist.

a) Zeigen Sie, dass $\textsc{Cover}(G) \geq \textsc{Match}(G)$ für alle Graphen G gilt.

b) Entwerfen Sie eine Algorithmus, der in einem Graphen $G = (V, E)$ ein inklusionsmaximales Matching berechnet und dessen Laufzeit durch $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ beschränkt ist. Nehmen Sie hierfür an, dass der Graph in der Adjazenzlistendarstellung gegeben ist.

c) Zeigen Sie, dass die Größe eines inklusionsmaximalen Matchings eine 2-Approximation für die Größe eines Maximum-Matchings ist und geben Sie einen Graphen an, in dem ein inklusionsmaximales Matching existiert, das diesen Approximationsfaktor erreicht.