1. Übungstest (Präsenzblatt 10)

Datum: 13. Juni 2017

Der Test besteht aus **vier** Aufgaben mit insgesamt **26** Punkten. Zum Bestehen des Tests sind **13 Punkte** notwendig.

Als Hilfsmittel ist **ein doppelseitig handgeschriebener Zettel** zulässig. Weitere Hilfsmittel dürfen nicht verwendet werden.

Schreiben Sie unbedingt **leserlich**, da unleserliche Antworten nicht gewertet werden können. Mit dem Beginn des Ausfüllens dieses Tests gilt die Prüfungsfähigkeit als bestätigt. Täuschungsversuche führen zu einer Bewertung mit 0 Punkten.

Aufgabe 1 (4 Punkte): (O–Notation)

Kreuzen Sie jede Beziehung an, die gültig ist. Es gibt pro vollständig richtig ausgefüllter Zeile einen Punkt.

f	g	$f(n) \in O(g(n))$	$f(n) \in \Omega(g(n))$	$f(n) \in \Theta(g(n))$
$300n^3$	$\frac{1}{200} \cdot 3^n$			
$(\log n^4)^2$	$\frac{1}{2}\sqrt[3]{n}$			
n^2	$n \log^6 n$			
$n^4 - 10\sqrt{n}$	$10n^4 + 100 \ln n$			

Aufgabe 2 (6 Punkte): (Rekursionsgleichungen)

Gegeben ist die folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) = \begin{cases} 27 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 & \text{, wenn } n > 1 \\ 1 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Sie können im Folgenden annehmen, dass n eine Dreierpotenz ist.

a) Leiten Sie eine Funktion $f(n)$ her, für die $T(n) \in \Theta(f(n))$ gilt.

b) Zeigen Sie für die in Aufgabenteil a) angegebene Funktion f, dass $T(n) \in \mathcal{O}(f(n))$ gilt. Nutzen Sie dazu Induktion.

Aufgabe 3 (8 Punkte): (Gierige Algorithmen)

Die Lernraumbetreuung DAP2 wird von n Tutoren durchgeführt. Seien die Zeitstempel innerhalb einer Woche mit ganzen Zahlen bezeichnet. Der Tutor T_i ist im Gebäude OH12 im Zeitintervall $[a_i, b_i]$ zu finden. Die Intervalle der Anwesenheiten aller Tutoren sind als Arrays $A[1..n]$ und $B[1..n]$ gegeben, es gelten also $A[i] = a_i$ und $B[i] = b_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Sarah fragt sich, ob es zwei Tutoren gibt, deren Anwesenheitszeitintevalle sich überschneiden, es also mindestens ein Paar T_i, T_j gibt, mit $i \neq j$ und $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \emptyset$.

Zum Beispiel gibt es für $n = 5$ Tutoren in der Menge der Intervalle $\{[5, 11], [4, 4], [1, 6], [15, 18]\}$ die Tutoren T_2 und T_3, deren Intervalle $[4, 4]$ und $[1, 6]$ sich überschneiden, da $4 \in [4, 4]$ und $4 \in [1, 6]$.

a) Beschreiben Sie mit eigenen Worten einen **gierigen** Algorithmus, der bei Eingabe der Arrays A und B `TRUE` zurückgibt, falls es mindestens zwei Tutoren gibt, die irgendwann gleichzeitig im Gebäude OH12 zu finden sind, und `FALSE` sonst. Geben Sie den Algorithmus auch in Pseudocode an. Für die volle Punktzahl wird ein Algorithmus erwartet, dessen Worst-Case-Laufzeit durch $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$ beschränkt ist.

b) Analysieren Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus.

c) Beweisen Sie, dass Ihr Algorithmus die korrekte Antwort zurückgibt.

Aufgabe 4 (8 Punkte): (Dynamische Programmierung)

Auf einer Laufbahn befinden sich n Stationen, die eine Spielerin besuchen kann, um Punkte zu sammeln. Bei der i-ten Station ändert sich ihr Punktestand um $A[i]$ Einheiten, wobei $A[i]$ ganze Zahlen für alle $1 \leq i \leq n$ sind. Zu Beginn des Spiels wählt die Spielerin die Start- und Endstationen k bzw. ℓ, $1 \leq k \leq \ell \leq n$, und darf daraufhin nur die Stationen $k, k+1, \ldots, \ell$ besuchen und bekommt insgesamt $\sum_{j=k}^{\ell} A[j]$ Punkte.

Die Spielerin möchte ihre Punkte maximieren. Wenn beispielsweise die Punktewerte aller Stationen in dem Array $A = [-2, 3, -1, 3, 1, 3, -2, -3, 4, -1, 2]$ gegeben sind, bekommt die Spielerin maximal 9 Punkte wenn sie $k = 2$ und $\ell = 6$ angibt, d. h., die Stationen mit Punktewerten $[3, -1, 3, 1, 3]$ besucht.

a) Sei $M[\ell]$ die maximale Punktesumme einer Spielerin, deren letzte besuchte Station ℓ ist. Geben Sie eine rekursive Formulierung für $M[\ell]$ an.

b) Geben Sie einen Algorithmus in Pseudocode an, der auf dynamischer Programmierung basiert, der die rekursive Formulierung aus Aufgabenteil a) umsetzt und die maximale mögliche Punktesumme einer Spielerin auf der Laufbahn $A[1..n]$ zurückgibt.

c) Analysieren Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus.

d) Beweisen Sie die Korrektheit der in Teilaufgabe a) angegebenen rekursiven Formulierung.