technische universität dortmund

SoSe 2017

C. Sohler
A. Krivošija, A. Rey, H. Sandvoß

DAP2 – Präsenzübung 2

Besprechung: 02.05.2017 — 03.05.2017

Präsenzaufgabe 2.1: (Schleifeninvariante und Korrektheitsbeweis)

Betrachten Sie das folgende Programme, das als Eingabe eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ erhält.

```
BerechneWert(n):
1  x ← 1
2  if n > 0 then
3      z ← 1
4      for i ← 1 to n do
5          z ← z · i
6      a ← 1
7      b ← z
8      w ← 1
9      j ← 1
10     while j < n do
11         a ← a · j
12         b ← b/(n − j + 1)
13         w ← w + z/(a · b)
14         j ← j + 1
15     x ← w + 1
16 return x
```

Beweisen Sie, dass das Programm für eine Eingabe n den Wert 2^n berechnet. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

a) Formulieren Sie eine Schleifeninvariante $A_1(i)$, die zu Beginn der i. Iteration der *For*-Schleife (Zeilen 4 und 5) für z gilt, und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

b) Verwenden Sie diese Schleifeninvariante, um den Wert von z nach Schleifenaustritt zu bestimmen.

c) Formulieren Sie eine Schleifeninvariante $A_2(j)$, die zu Beginn der j. Iteration der *While*-Schleife (Zeilen 10 bis 14) für w gilt, und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

d) Verwenden Sie diese Schleifeninvariante, um zu zeigen, dass das Programm für eine Eingabe n den Wert 2^n ausgibt.

Hinweis: Sie können hierfür die Gleichheit $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ voraussetzen.

Präsenzaufgabe 2.2: (Induktionsbeweise: Fibonacci-Zahlen)

Die Fibonacci-Zahlen sind folgendermaßen definiert:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n > 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} f(n+1) & f(n) \\ f(n) & f(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen gleich der $(n+2)$-ten Fibonacci-Zahl minus 1 ist, d.h.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = f(n+1) - 1.$$

c) Der sogenannte goldene Schnitt ϕ is definiert als $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $f(n) = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$ ist.