

DAP2 – Heimübung 5

Ausgabedatum: 12. 5. 17 — Abgabedatum: Fr. 19. 5. 17 (Mo. 22. 5. für Gruppen 27–32) 12 Uhr

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren **vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer** auf Ihre Abgaben!

Aufgabe 5.1 (5 Punkte): (Teile und Herrsche)

Eine endliche, natürliche Zahlenfolge a_1, a_2, \dots, a_n heißt *superwachsend*, falls jede Zahl größer als die Summe der vorherigen Zahlen ist, also

$$a_i > \sum_{j=1}^{i-1} a_j$$

für alle i , $2 \leq i \leq n$, gilt.

Wir betrachten nun das folgende Problem: Gegeben sei eine solche superwachsende endliche, natürliche Zahlenfolge und eine natürliche Zahl q , $a_1 \leq q \leq a_n$, für die es eine Teilmenge der Indizes $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ gibt, sodass $\sum_{i \in I} a_i = q$ gilt. Gesucht ist eine Lösung I , für die diese Gleichung gilt. Im Folgenden untersuchen wir zuerst den größten Index, der in einer Lösung enthalten ist.

Im folgenden Beispiel sei $n = 8$:

$$1, 3, 7, 12, 24, 51, 103, 221.$$

Für $q = 73$ gilt $q = 3 + 7 + 12 + 51$, also ist $I = \{2, 3, 4, 6\}$ eine Lösung und 6 der größte enthaltene Index.

- a) (1 Punkt) Entwerfen Sie einen Teile-und-Herrsche-Algorithmus, der für eine gültige Eingabe den größten Index einer Lösung bestimmt. Beschreiben Sie Ihren Algorithmus zunächst mit eigenen Worten. Die volle Punktzahl erreicht ein Algorithmus, der im schlechtesten Fall mit $\mathcal{O}(\log n)$ Rechenschritten auskommt und immer den richtigen Index ausgibt.
- b) (1 Punkt) Geben Sie eine Implementierung Ihres Algorithmus in Pseudocode an.
- c) (2 Punkte) Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.
- d) (1 Punkt) Um nun die gesamte Lösung für eine gültige Eingabe zu bestimmen, geht ein naiver Algorithmus für alle Indizes in absteigender Reihenfolge wie folgt vor. Er vergleicht den Wert a_i an der aktuellen Stelle i mit q : Falls er größer oder gleich ist, wird der aktuelle Index i in die Lösungsmenge aufgenommen und q auf $q - a_i$ gesetzt. Ist es hier möglich, die asymptotische Worst-Case-Laufzeit durch einen Teile-und-Herrsche-Ansatz zu verbessern? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5.2 (5 Punkte): (Teile und Herrsche)

In einem Eiscafé gibt es zwei unterschiedliche Karten für Eis und für Getränke. Alice und Bob wollen die Preise der beiden Karten vergleichen und schreiben dafür zunächst jeder die Preise einer Karte aufsteigend sortiert in zwei Arrays $A[1..n]$ und $B[1..n]$ auf je eine Serviette. Wir nehmen an, dass alle Preise unterschiedlich sind. Nun möchten sie herausfinden, welches das n -günstigste Produkt ist, das man in dem Café bestellen kann (n ist die Länge der Arrays). Zum Beispiel ist für die Arrays $A = [1, 2, 8, 15]$ und $B = [5, 9, 10, 16]$ der Länge $n = 4$ der viertkleinste Wert 8. Sie haben außer ihrer Serviette nichts zu schreiben dabei, sodass sie weder neue Arrays erzeugen noch A und B zusammenfassen können. Im Kopf können sie nur je zwei Elemente $A[i]$ und $B[j]$, $1 \leq i, j \leq n$, vergleichen und keine anderen Operationen ausführen.

- a) **(2 Punkte)** Entwerfen Sie einen Teile-und-Herrsche-Algorithmus, der in Zeit $\mathcal{O}(\log n)$ den Wert des n -kleinsten Elements findet, und beschreiben Sie ihn mit eigenen Worten. Geben Sie eine Implementierung Ihres Algorithmus in Pseudocode an. Achten Sie dabei auf die oben genannten Einschränkungen. Der Vergleich zweier Elemente kostet einen Rechenschritt.
- b) **(1 Punkte)** Analysieren Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus. Stellen Sie hierzu eine Rekursionsgleichung für die Laufzeit Ihres Algorithmus auf und lösen Sie diese.
- c) **(2 Punkte)** Zeigen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.

Hinweis: Sie dürfen sich in dieser Aufgabe auf den Fall beschränken, dass n eine Zweierpotenz ist. Eine allgemeine Lösung wird in der Übung besprochen.