technische universität dortmund

SoSe 2014

C. Sohler
A. Krivošija, M. Schmidt
H. Wagner, J. Zweihoff

DAP2 – Heimübung 4

Ausgabedatum: 23.04.2014 — Abgabedatum: 02.05.2014

Dieses PDF verfolgt das Ziel, verschiedene Möglichkeiten aufzuzeigen, wie man eine geschlossene Form für Rekursionsgleichungen finden kann. Wenn man mit Hilfe der unten dargestellten Methoden eine geschlossene Form gefunden hat, muss man anschließend **mit Induktion beweisen, dass es sich wirklich um eine obere Schranke handelt.**

Zur Anschauung verwenden wir Aufgabe 4.1 vom letzten Heimübungsblatt:

Aufgabe 4.1 (5 Punkte): (Rekursionsgleichung)

Gegeben seien die Rekursionsgleichungen:

1.
$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 2 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + 2 \cdot n & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

2.
$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 3 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + \sqrt{n} & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

Bestimmen Sie eine asymptotische obere Schranke für $T(n)$ und beweisen Sie sie. Sie dürfen annehmen, dass n von der Form 4^k bzw. 3^k für ein $k \in \mathbb{N}$ ist. Sie dürfen dazu **nicht** das Master-Theorem verwenden.

Begründen Sie, warum die Annahme über n keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt.

Wir gehen jetzt verschiedene Möglichkeiten durch, Aufgabe 4.2 zu lösen.

Vorlesungsmethode

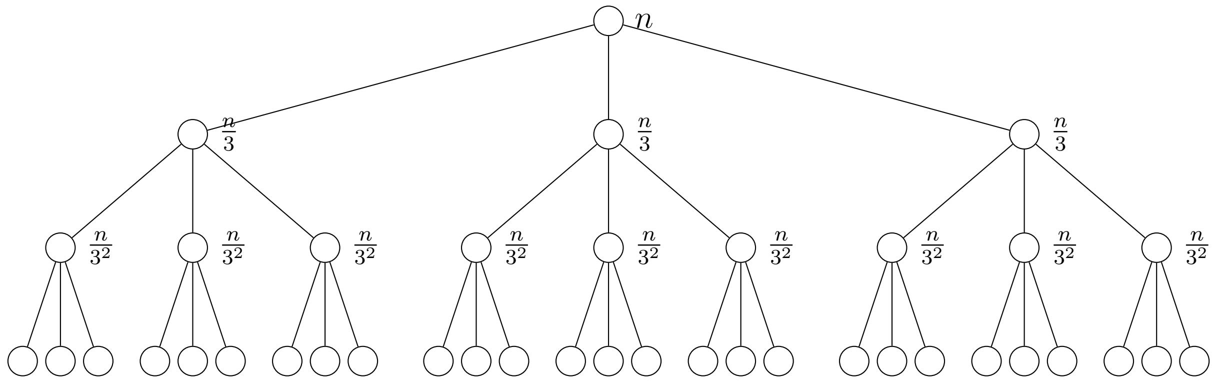
Die Idee ist folgende: Laufzeiten der Form $T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n)$ entstehen, wenn man einen rekursiven Algorithmus hat. Dieser

- macht a rekursive Aufrufe
- ruft sich selbst mit n/b Daten rekursiv auf
- benötigt $f(n)$ zusätzliche Laufzeit außer den rekursiven Aufrufen
- hat einen Rekursionsabbruch, d.h. für ein kleines n, z.B. $n = 1$, wird eine Sonderbehandlung aufgerufen statt der Rekursion, die normalerweise konstante Laufzeit hat.

Wir schauen uns Aufgabe 4.2 an, und dort ist $a = 3$, $b = 3$ und $f(n) = \sqrt{n}$.

Die 'zusätzliche Laufzeit' sowie die konstante Laufzeit im Rekursionsabbruch sind eigentlich die einzige tatsächliche Arbeit, die anfällt. Wir müssen sie nur geschickt für die rekursiven Aufrufe 'zusammenrechnen'.

Dazu gucken wir uns den Rekursionsbaum anhand von unserem Beispiel an. Hier gibt es immer drei rekursive Aufrufe, da $a = 3$ ist. Außerdem reduziert sich die Datenmenge auf ein Drittel, da $b = 3$ ist. Der Baum sieht also so aus:



Neben den Knoten steht, wie viel von den Eingabedaten in diesem Knoten ankommt. Wenn in einem Knoten $n/3^2$ Daten sind, dauert die 'zusätzliche' Laufzeit natürlich $f(n/3^2)$ statt $f(n)$. In unserem Beispiel wäre das also $f(n) = \sqrt{n}$ im Wurzelknoten, $f(n/3) = \sqrt{\frac{n}{3}}$ auf der zweiten Ebene, $f(n/9)) = \sqrt{\frac{n}{9}}$ auf der dritten Ebene und so weiter.

Jetzt müssen wir noch zählen, wie viele Knoten auf einer Ebene eigentlich sind. Auf der ersten Ebene ist nur ein Knoten, der $\sqrt{n}$ kostet – insgesamt kostet das also $\sqrt{n}$. Auf der zweiten Ebene sind drei Knoten, jeder davon kostet $\sqrt{n/3}$. Zusammen kosten sie also $3\sqrt{n/3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{n}$. Auf der dritten Ebene sind neun Knoten, die jeweils $\sqrt{n/9}$ kosten, zusammen macht das $9\sqrt{n/9} = (9/3)\sqrt{n} = 3\sqrt{n} = (\sqrt{3})^2\sqrt{n}$.

Unser Baum hat (wenn n eine Dreierpotenz ist) $\log_3 n + 1$ Ebenen, da man n genau $\log_3 n$ mal durch drei teilen muss, bis man 1 erhält, d.h. bis in jedem Knoten nur noch ein Element verarbeitet wird (und weil man zusätzlich die erste Ebene mit dem Wurzelknoten hat).

Jetzt kommt der kreative Teil: Wir erkennen das Muster. Auf Ebene i sind nämlich 3^{i-1} Knoten, und jeder davon kostet $\sqrt{n/3^{i-1}}$, zusammen kosten alle Knoten auf Ebene i also $3^{i-1}\sqrt{n/3^{i-1}} = \sqrt{3}^{i-1} \cdot \sqrt{n}$. Das stimmt sogar auf der untersten Ebene (was im Allgemeinen nicht so sein muss). Dort haben wir Laufzeit 1 in jedem Knoten, da $T(1) = 1$ ist, und wir haben $3^{\log_3 n+1-1} = n$ viele Knoten auf der untersten Ebene. Die Laufzeit ist also n, und laut Formel sollte sie $\sqrt{3}^{\log_3 n+1-1} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$ sein.

Jetzt müssen wir die Ebenen noch zusammenrechnen. Dafür müssen wir $\sqrt{3}^{i-1} \cdot \sqrt{n}$, angefangen von $i = 1$ bis zu $i = \log_3 n + 1$, zusammenrechnen. Wir erhalten:

$$\sum_{i=1}^{\log_3 n+1} \sqrt{3}^{i-1} \cdot \sqrt{n} = n + \sqrt{n} \cdot \sum_{i=1}^{\log_3 n} \sqrt{3}^{i-1} = n + \sqrt{n} \cdot \sum_{i=0}^{\log_3 n-1} \sqrt{3}^{i}$$

$$= n + \frac{\sqrt{3}^{\log_3 n} - 1}{\sqrt{3} - 1}\sqrt{n} = n + \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{3} - 1} \cdot \sqrt{n} = n + \frac{n - \sqrt{n}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}n - \sqrt{n}}{\sqrt{3} - 1}.$$

Einsetzmethode

Hier wird der Term immer wieder aufgelöst, bis man durch geschicktes Zusammenfassen ein Muster erkennt und eine Vermutung entwickelt, wie der Term nach i-fachem Einsetzen aussieht. Dadurch wird mehr gerechnet als bei der Vorlesungsmethode, und man läuft schneller Gefahr, Fehler zu machen, da man die Terme geschickt zusammenfassen muss, und weil das Verständnis beim reinen Einsetzen schneller verloren gehen kann.

Wir setzen den Term also mehrfach ineinander ein:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + \sqrt{n} \\
&= 3\left[3T\left(\frac{n}{9}\right) + \sqrt{\frac{n}{3}}\right] + \sqrt{n} \\
&= 9 \cdot T\left(\frac{n}{9}\right) + \frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{n} + \sqrt{n} \\
&= 9\left[3T\left(\frac{n}{27}\right) + \sqrt{\frac{n}{9}}\right] + \frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{n} + \sqrt{n} \\
&= 27 \cdot T\left(\frac{n}{27}\right) + 9 \cdot \sqrt{\frac{n}{9}} + \frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{n} + \sqrt{n} \\
&= 3^3 \cdot T\left(\frac{n}{3^3}\right) + 3^2\sqrt{\frac{n}{3^2}} + \frac{3^1}{\sqrt{3^1}}\sqrt{n} + \frac{3^0}{\sqrt{3^0}}\sqrt{n} \\
&= 3^3 \cdot T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \sqrt{3^2}\sqrt{n} + \sqrt{3^1}\sqrt{n} + \sqrt{3^0}\sqrt{n} \\
&= \dots \\
&= 3^i \cdot T\left(\frac{n}{3^i}\right) + \sqrt{3^{i-1}}\sqrt{n} + \sqrt{3^{i-2}}\sqrt{n} + \ldots + \sqrt{3^0}\sqrt{n} \\
&= 3^i \cdot T\left(\frac{n}{3^i}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} \sqrt{3^k}\sqrt{n}.
\end{aligned}
$$

Der kreative Teil ist hier, den Ausdruck passend darzustellen und korrekt zu verallgemeinern. Jetzt muss man sich überlegen, wann die Rekursion abbricht, nämlich, wenn $\frac{n}{3^i} = 1$ ist. Das ist der Fall (wir nehmen wieder an, dass n eine Dreierpotenz ist), wenn $i = \log_3 n$ ist. Dann ergibt der Term:

$$
\begin{aligned}
&3^{\log_3 n} \cdot T\left(\frac{n}{3^{\log_3 n}}\right) + \sum_{k=0}^{\log_3 n-1} \sqrt{3^k}\sqrt{n} \\
=&n \cdot T(1) + \sum_{k=0}^{\log_3 n-1} \sqrt{3^k}\sqrt{n} \\
=&n + \sum_{k=0}^{\log_3 n-1} \sqrt{3^k}\sqrt{n} = n + \frac{\sqrt{3}^{\log_3 n} - 1}{\sqrt{3}-1}\sqrt{n} \\
=&n + \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt{n} = n + \frac{n-\sqrt{n}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}n - \sqrt{n}}{\sqrt{3}-1}
\end{aligned}
$$

und damit haben wir das gleiche Ergebnis wie bei Methode 1.

Teleskopsummenmethode

Warum diese Methode funktioniert, wird in der Lösung von Heimübungsblatt 5 erklärt. Wir führen sie hier einmal an unserem Beispiel durch.

Wir nehmen wieder an, dass n eine Dreierpotenz ist, und gucken uns die Laufzeit jetzt einfach für Dreierpotenzen an. Die Rekursionsformel sieht dann so aus:

$$\begin{aligned} & T(3^k) = 3 \cdot T(3^{k-1}) + \sqrt{3^k} \\ \Leftrightarrow \quad & T(3^k) = 3 \cdot T(3^{k-1}) + (\sqrt{3})^k \end{aligned}$$

Jetzt teilen wir alles durch 3^k und erhalten als äquivalente Aussage:

$$\begin{aligned} & T(3^k) = 3 \cdot T(3^{k-1}) + \sqrt{3^k} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{T(3^k)}{3^k} = \frac{3 \cdot T(3^{k-1})}{3^k} + \frac{(\sqrt{3})^k}{3^k} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{T(3^k)}{3^k} = \frac{T(3^{k-1})}{3^{k-1}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^k \end{aligned}$$

Der Trick ist jetzt, dass wir $\frac{T(3^k)}{3^k}$ und $\frac{T(3^{k-1})}{3^{k-1}}$ als verschiedene Elemente der gleichen Folge sehen können, nämlich als das k. und $(k-1)$. Glied der Folge $S(i)$, die wir für $i \geq 0$ durch

$$S(i) = \frac{T(3^i)}{3^i},$$

definieren. Unsere Gleichung sagt uns den Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern dieser Folge, der ist nämlich:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{T(3^k)}{3^k} - \frac{T(3^{k-1})}{3^{k-1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^k$$

Für Folgen mit dieser Eigenschaft kann man zeigen, dass man $S(k)$ errechnen kann, indem man die Abstände aufsummiert. Der Beweis dazu steht in der Lösung des 5. Heimübungsblatts. Genauer gesagt, gilt:

$$S(i) = S(0) + \sum_{k=1}^{i} \left[S(k) - S(k-1)\right].$$

Die Summe beginnt bei 1. Man kann sie auch bei 0 beginnen lassen und das zusätzliche $S(0)$ loswerden, indem man $S(-1) = 0$ definiert. Dann gilt nämlich auch $S(0) - S(-1) = S(0) = \frac{T(1)}{1} = 1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^0$ und wir können die Summe bei 0 starten lassen. Wir erhalten also:

$$S(i) = \sum_{k=0}^{i} \left[S(k) - S(k-1)\right] = \sum_{k=0}^{i} (\sqrt{3})^k = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{i+1} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 1}{\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}^i}\right) - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}.$$

Wir haben $S(i)$ ausgerechnet, interessieren uns aber eigentlich für $T(3^i) = 3^i \cdot S(i)$. Also rechnen wir jetzt:

$$T(3^i) = 3^i S(i) = 3^i \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}^i}\right) - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}^i - \sqrt{3} \cdot 3^i}{1 - \sqrt{3}}$$

Für $T(n) = T(3^{\log_3 n})$ ergibt das also

$$\frac{\sqrt{3}^{\log_3 n} - \sqrt{3} \cdot 3^{\log_3 n}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{3} \cdot n}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot n - \sqrt{n}}{\sqrt{3} - 1}$$

wie auch mit den vorherigen Ansätzen.

Merkregel zur geometrischen Summe

Eine kleine Merkregel zur geometrischen Summe $\sum_{i=0}^{k} a^i$. Wir nennen diese Summe mal kurz X und schreiben sie in Langform auf. Dann nehmen wir die Gleichung mit a mal und erhalten eine zweite Gleichung. Dann ziehen wir die erste von der zweiten Gleichung ab und erhalten:

$$\begin{array}{rccccc}
X = & 1+a+ & a^2+a^3+ & \ldots+a^k & \\
aX = & a+ & a^2+a^3+ & \ldots+a^k+ & a^{k+1} \\
aX - X = & -1+ & & & a^{k+1}
\end{array}$$

Für $a \neq 1$ lösen wir die dritte Gleichung nach X auf:

$$\begin{aligned}
aX - X &= -1 + a^{k+1} \\
\Leftrightarrow X(a-1) &= a^{k+1} - 1 \\
\Leftrightarrow X &= \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist die Formel für die geometrische Formel. Es gilt also:

$$\sum_{i=0}^{k} a^i = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}$$

für alle $a \neq 1$.

Zu Ende rechnen...

Hat man diesen Term mit einer der drei Methoden ermittelt, kann man ihn noch umformen zu

$$\frac{\sqrt{3}n - \sqrt{n}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} n - \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \sqrt{n},$$

feststellen, dass das $\Theta(n)$ ist, und die Aussage, dass $T(n) \in O(n)$ ist, dann beweisen:

Behauptung 1: Für alle $i \geq 0$ und $n = 3^i$ gilt: $T(n) \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} n - \frac{1}{\sqrt{3}-1}\sqrt{n}$.

Induktionsanfang, $n = 1$ bzw. $i = 0$.
Dann gilt: $T(2^0) = T(1) = 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\sqrt{1} - \frac{1}{\sqrt{3}-1}\sqrt{1}$.

Induktionsvoraussetzung. Behauptung 1 gilt für ein beliebiges, aber festes i bzw. für $n = 3^i$.

Induktionsschritt, $n \to 3n$. Wir zeigen, dass Behauptung 1 auch für $i + 1$ bzw. $3n$ gilt.

$$
\begin{aligned}
T(3n) =& 3 \cdot T(n) + \sqrt{n} \\
\overset{I.V.}{\leq}& 3\left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} n - \frac{1}{\sqrt{3}-1}\sqrt{n}\right] + \sqrt{3n} \\
=& 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} n - \frac{3}{\sqrt{3}-1}\sqrt{n} + \sqrt{3}\sqrt{n} \\
=& 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} n - \left(\frac{3}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{n} \\
=& 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} n - \left(\frac{3 - 3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right) \cdot \sqrt{n} \\
=& \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}(3n) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right) \cdot \sqrt{3n}.
\end{aligned}
$$

□