technische universität
dortmund

Effiziente Algorithmen und
Komplexitätstheorie /

Informatik

Aufteilungs- und Zuweisungsalgorithmen

Proseminar
im Wintersemester 2017/2018

Anja Rey, 11. Oktober 2017

Organisatorisches

Proseminar (3 CP)

- schriftliche Ausarbeitung zu einem ausgewählten Thema
  - 5 bis 7 Seiten, PDF-Format (LaTeX)
  - in eigenen Worten (reine Übersetzung nicht ausreichend)
  - formal und anschaulich
  - vollständige Quellenangaben
- Rückmeldung zu einer anderen Ausarbeitung in Form eines *Peer-Reviews*
- erfolgreich absolvierte Zwischengespräche
  1. Besprechung der Ausarbeitung vor erster Abgabe
  2. Rückmeldung der Seminarleiterin, Vorstellung eines schlüssigen Vortragskonzepts
- 30-minütiger Vortrag des Themas (+10 min für Fragen und Diskussion)
- Frage zu mindestens einem Vortrag

Präsentationskurs (1 CP)

begleitend: 4 Blöcke, Mi 12–16 Uhr oder Fr 14–18 Uhr, je in OH 14, 304

Zeitplan

Beginn

- Mi 11.10.17 Einleitung, Themen

Themenvergabe

- Thema auswählen bis 17.10 unter moodle

Ausarbeitungsphase

- Mi 18.10.17 / Fr 20.10.17 Präsentationskurs 1
- Mi 25.10.17 Bearbeitung
- Mi 08.11.17 Besprechung & Bearbeitung
- 6. Woche Mo–Mi Zwischenbesprechung 1
- Do 16.11.17 erste Abgabe Ausarbeitung

— Rechtzeitig Vortragsplanung beginnen! —

Reviewphase

- Verteilung Reviews (per E-Mail)
- Mi 22.11.17 / Fr 24.11.17 Präsentationskurs 2
- Mi 29.11.17 Besprechung & Bearbeitung
- Mi 29.11.17 Abgabe Reviews
- Di 05.12.17 zweite Abgabe Ausarbeitung

Vortragsvorbereitung

- Mi 06.12.17 / Fr 08.12.17 Präsentationskurs 3
- 10. Woche Mo–Do Zwischenbesprechung 2
- Fr 15.12.17 / Mi 18.12.17 Präsentationskurs 4

Vortragsphase und Ende

- 12.–15. Woche: Vorträge
- Feedback am Ende

Fragen?

- Informationen unter

  `http://ls2-www.cs.uni-dortmund.de/~rey/wise1718proseminar`
- Themen und weitere Materialien unter

  `https://moodle.tu-dortmund.de/course/view.php?id=8368`
- Abgaben und weitere Fragen an anja.rey@tu-dortmund.de
- Zwischengespräche und weitere Fragen in OH 14, 313
- weitere Fragen in Seminarterminen und Sprechstunden

  Mo 13:30 Uhr bis 14:30 Uhr

Inhalte

Bewertungskriterien

1. Lesbarkeit
   (Struktur, Länge, Sprache, Verständlichkeit, Verknüpfungen)
2. technische Qualität
   (Definitionen, Anschaulichkeit, Korrektheit, Genauigkeit)
3. Referenzen und Eigenanteil
   (Quellenangaben, Literaturverzeichnis, eigene Formulierungen)

Themenübersicht

- faire Aufteilung teilbarer und unteilbarer Güter
- das Häuser-Zuordnungs-Problem
- das *Hospitals-Residents*-Problem
- das Mitbewohner-Problem, Koalitionsbildung in hedonischen Spielen

Aufteilung und Zuweisung mit Präferenzen

Eine Instanz besteht aus

- Agenten (häufig zwei disjunkte Mengen)
- ordinalen Präferenzen über Teilmengen der Agenten
- anderen Bedingungen: Kapazitäten etc.

Ziel: faire oder optimale Aufteilung (*Allocation*) oder Zuweisung (*Matching*) finden

Wir unterscheiden zwischen

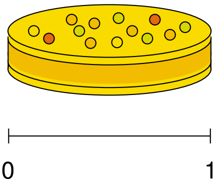
- bipartiten Zuweisungen mit beidseitigen Präferenzen
- bipartiten Aufteilungen mit einseitigen Präferenzen
  - Güter: teilbar (sharable, divisible) vs. nicht teilbar
- nicht-bipartiten Zuweisungen mit Präferenzen

Hier: Design und Analyse effizienter Algorithmen (oder ggf. Aussagen über Nicht-Existenz oder Härte solcher Algorithmen)

Aufteilung teilbarer Güter

Situation: inhomogener *Kuchen*

Ziel: jeder bekommt eine *faire* Portion



Definition 1

Eine Cake-Cutting-Instanz besteht aus einem Kuchen $[0, 1]$, Spielern $N = \{1, \dots, n\}$ und einer Präferenzfunktion $v_i : \{X \mid X \subseteq [0, 1]\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ für alle $i \in N$, sodass

- $v_i([a, a]) = 0 \; \forall a \in [0, 1]$ (Nicht-Atomarität);
- $v_i([0, 1]) = 1$ (Normalisierung);
- für jedes Teilintervall $X \subseteq [0, 1]$: $v_i(X) \geq 0$ (Nicht-Negativität);
- für jedes Teilintervall $[a, b] \subseteq [0, 1]$ und λ: $0 \leq \lambda \leq 1$, existiert ein Punkt $c \in [a, b]$ mit $v_i([a, c]) = \lambda v_i([a, b])$ (Teilbarkeit);
- für zwei Teilintervalle $X, Y \subseteq [0, 1]$: $v_i(X) + v_i(Y) = v_i(X \cup Y)$ (Additivität).

Aufteilung teilbarer Güter

Beispiel: Cut & Choose

- $n = 2$
- Spieler 1 schneidet den Kuchen in zwei disjunkte Stücke X_1 und X_2, sodass $v_1(X_1) = v_1(X_2)$ und $X_1 \cup X_2 = [0, 1]$.
- Spieler 2 wählt eine der beiden Stücke X_i mit $v_2(X_i) \geq v_2(X, j)$, $j \neq i$.
- Spieler 1 bekommt das andere Stück.

weitere Protokolle, z. B. Dubins–Spanier, Evan–Paz, Selfridge–Conway

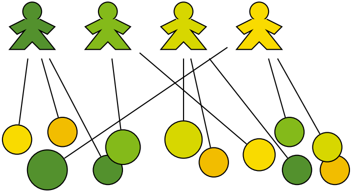
Fairness-Kriterien

- Proportionalität
- Neidfreiheit

Thema 1

Thema 2

Aufteilung unteilbarer Güter



Situation: Objekte/Ressourcen mit unterschiedlichem Wert für Agenten

Ziel: jeder bekommt einen *optimalen* Anteil (1 : *many*)

Definition 2 (*MultiAgent Resource Allocation* (MARA))

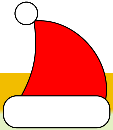
Eine MARA-Instanz besteht aus

- Agenten $N = \{1, \ldots, n\}$
- Objekten $\mathcal{O} = \{o_1, \ldots, o_p\}$
- Präferenzen der Agenten in N

unterschiedliche Darstellungen der Präferenzen:

- kardinale Präferenzen (Nutzenfunktion $u : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$)
- ordinale Präferenzen (z. B. Ranking über Bündel von Objekten)

Aufteilung unteilbarer Güter



Beispiel: das *Santa-Claus*-Problem

- MARA-Instanz mit kardinalen Präferenzen
- Nutzenfunktion u ist modular: für alle $S, T \subseteq \mathcal{O}$: $u(S \cup T) = u(S) + u(T) - u(S \cap T)$.
- Ziel: Nutzen für das unglücklichste Kind maximieren.

Fairness vs. Effizienz:

- Maxmin-Aufteilung
- Neidfreiheit
- Pareto-Effizienz

Protokolle:

- *Adjusted-Winner*-Verfahren

Thema 3

- Proportionales Aufteilungsverfahren

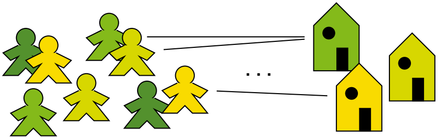
Thema 4

- ...

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Situation: beidseitige Präferenzen

Ziel: (*many* : 1)-Zuweisung



Definition 3 (Das *Hospital-Residents*-Problem (HR))

Eine HR-Instanz besteht aus

- den disjunkten Agentenmengen $R = \{r_1, \ldots, r_{n_1}\}$ und $H = \{h_1, \ldots, h_{n_2}\}$
- $\forall h_j \in H$: Kapazität c_j
- $E \subseteq R \times H$ akzeptable Paare, $m = \|E\|$
- $\forall r_i \in R$: $A(r_i) = \{h_j \in H \mid (r_i, h_j) \in E\}$, $\forall h_j \in R$: $A(h_j) = \{r_i \in R \mid (r_i, h_j) \in E\}$
- $\forall a_k \in R \cup H$: strikte Präferenzliste über $A(k)$

M ist eine Zuweisung (*Matching*), wenn $|M(r_i)| \leq 1 \; \forall r_i \in R$ und $|M(h_j)| \leq c_j \; \forall h_j \in H$

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Seien $\mathcal{I}$ eine HR-Instanz und M eine Zuweisung in $\mathcal{I}$.

$(r_i, h_j) \in E \setminus M$ blockiert M, falls

- Arzt r_i ist nicht zugewiesen oder bevorzugt h_j vor $M(r_i)$;
- Krankenhaus h_j ist unterbesetzt oder bevorzugt r_i vor mindestens einem Arzt in $M(h_j)$.

Eine Zuweisung M heißt stabil, falls kein Paar M blockiert.

Satz 4

Es gibt immer eine stabile Zuweisung.

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Nobelpreis an L. Shapley und A. Roth, 2012

Gale–Shapley-Algorithmus (*resident oriented*, 1962)

Eingabe: HR-Instanz

Ausgabe: stabile Zuweisung M (optimal für Ärzte)

```
alle Ärzte frei
alle Krankenhäuser komplett unbesetzt
Solange (ein r ∈ R frei) und (Präferenzliste von r nicht-leer):
    h ← erstes Krankenhaus auf Liste von r
    Falls h vollständig besetzt:
        r′ ← schlechtester Arzt, der bisher h zugewiesen ist
        r′ frei
    Weise r zu h zu
    Falls h vollständig besetzt:
        s ← schlechtester Arzt, der bisher h zugewiesen ist
        Für jeden Nachfolger s′ von s auf Liste von h
            Entferne s′ und h aus deren jeweiligen Listen
Gib die Menge der zugewiesenen Paare zurück.
```

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Der oben angegebene Algorithmus gibt die eindeutige stabile Zuweisung M_a aus, die aus Sicht der Ärzte optimal ist.

Analog gibt es eine eindeutige stabile Zuweisung M_z, die aus Sicht der Krankenhäuser optimal ist.

Dazwischen kann es noch weitere stabile Zuweisungen geben, die jedes Krankenhaus mindestens so gut findet wie M_a und jeder Arzt mindestens so gut wie M_z.

Satz 5 (*Rural Hospitals*)

Für eine gegebene HR*-Instanz gelten:*

- *In allen stabilen Zuweisungen bekommen die gleichen Ärzte ein Krankenhaus zugewiesen.*
- *Jedes Krankenhaus bekommt in allen stabilen Zuweisungen die gleiche Anzahl an Ärzten.*
- *Jedes Krankenhaus, das in einer stabilen Zuweisung unterbesetzt ist, bekommt in jeder stabilen Zuweisung die gleichen Ärzten zugewiesen.*

Zuweisung von Ärzten auf Krankenhäuser

Varianten:

- stabiles Heiratsproblem (1:1)
- Indifferenzen in Präferenzen: schwache, starke und Super-Stabilität
- Berücksichtigung von Paaren
- Quoten: Mindestanzahlen und gemeinsame Kapazitäten
- (*many:many*)-Varianten: Zuweisung von Arbeitern und Firmen
- das Projekt-Zuweisungs-Problem
  - Kapzitäten von Projekten und Dozenten
  - Studierende und Dozenten haben Präferenzen über Teilmengen (Studierende)
  - Angebote von Dozenten
- tripartite Zuweisung
- ...

Thema 12

Thema 13

Thema 14

Thema 15

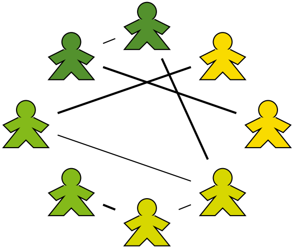
Thema 16

Thema 17

Stabiles Mitbewohnerproblem

Situation: nicht-bipartite, möglicherweise unvollständige Präferenzen über alle möglichen Mitbewohner

Ziel: paarweise Zuweisung



Definition 6 (Das *Stable-Roommates*-Problem (SR))

Eine SR-Instanz besteht aus

- Agenten $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$
- $E = \{\{a_i, a_j\} \mid a_i, a_j \in A, i \neq j, \{a_i, a_j\}$ akzeptable Paare$\}$, $m = \|E\|$
- $\forall a_i \in A$: $A(a_i) = \{a_j \in E \mid \{a_i, a_j\} \in E\}$
- $\forall a_i \in A$: strikte Präferenzliste über $A(a_i)$

Stabiles Mitbewohnerproblem

Sei $\mathcal{I}$ eine SR-Instanz. $M \subseteq E$ ist eine Zuweisung in $\mathcal{I}$, falls kein Agent zu mehr als einem anderen Agenten zugeordnet wird.

Ein Paar $(a_i, a_j) \in E \setminus M$ blockiert M, falls

- Agent a_i nicht zugewiesen ist oder a_j vor $M(a_i)$ bevorzugt;
- Agent a_j nicht zugewiesen ist oder a_i vor $M(a_j)$ bevorzugt.

M heißt stabil, falls kein Paar M blockiert.

$\mathcal{I}$ heißt lösbar, falls es eine stabile Zuweisung in $\mathcal{I}$ gibt.

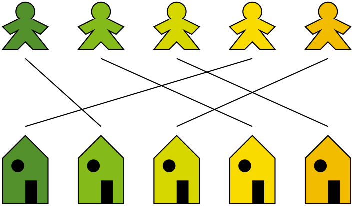
Konzepte

- SR-Instanzen sind nicht immer lösbar.
- Es gibt immer eine stabile Partitionierung. Thema 18
- fast-stabile Zuweisungen berücksichtigen geringe Kompromisse. Thema 19

Zuweisung von Häusern

Situation: einseitige Präferenzen von Agenten über Häuser

Ziel: (1 : 1)-Zuweisung



Optimalitätskriterien

Thema 6

- Pareto-Optimalität

Thema 7

- Popularität

Thema 8

Thema 11

- profilbasierte Optimalität: rang-maximale, gierige & großzügige Zuweisungen

Var

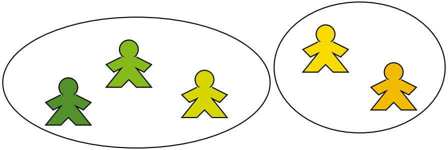
Thema 9

Thema 10

- *Housing Markets*: bestehende Zuweisung, individuelle Rationalität
- gewichtete Präferenzen
- (*many*:1)-Verallgemeinerung: WG mit Kapazitäten

hedonische Spiele

Situation: Koalitionsbildung; Zufriedenheit der Spieler hängt nur von eigener Koalition ab.



Definition 7

Ein hedonisches Spiel $(N, \succeq)$ besteht aus:

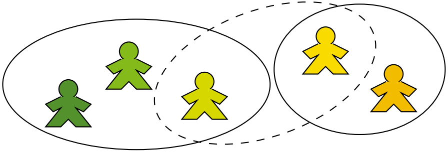
- endlicher Spielermenge $N = \{1, \ldots, n\}$,
- Präferenzprofil $\succeq = (\succeq_1, \ldots, \succeq_n)$ mit $\succeq_i$ totaler Präferenzrelation über $\mathcal{N}_i = \{C \subseteq N \mid i \in C\}$ für $i \in N$.

Also ist $\succeq$ reflexiv, transitiv, nicht notwendigerweise antisymmetrisch und total.

Eine Teilmenge $C \subseteq N$ heißt Koalition.
Ein Partitionierung Γ von N heißt Koalitionsstruktur. $\Gamma(i) \in \Gamma$ mit $i \in \Gamma(i)$.

hedonische Spiele

Ziel: stabile Koalitionsstruktur finden



Definition 8

Sei ein hedonisches Spiel $(N, \succeq)$. Eine Koalitionsstruktur heißt

- kernstabil, wenn es keine blockierende Koalition gibt,
  d. h., $\forall C \subseteq N, \exists i \in C \colon \Gamma(i) \geq C$.

Problemstellungen:

- Darstellungen: individuell rational, additiv separabel, ...
- Existenz:
  - *Pareto-optimale* und *individuell rationale* Aufteilung existiert immer:
    Preference-Refinement-Algorithmus
  - kernstabile Aufteilung existiert nicht immer:
    Top-Responsiveness, *Top-Covering*-Algorithmus

Thema 21

Thema 20

Vortragstermine I

	Thema	Datum
1	Cake-Cutting – Proportionalität	10.01.2018
2	Cake-Cutting – Neidfreiheit	10.01.2018
3	Aufteilung unteilbarer Güter – Scheidungsformel	10.01.2018
4	Proportionale Aufteilung unteilbarer Güter	10.01.2018
5	Wege zur Stabilität	10.01.2018
6	HA – Pareto-Optimaliät	17.01.2018
7	HA mit Kapazitäten – Pareto-Optimalität	17.01.2018
8	HA – Popularität	17.01.2018
9	HA mit Gewichten – Popularität	17.01.2018
10	HA – rang-maximale Zuweisungen	17.01.2018
11	HA – gierige und großzügige Zuweisungen	17.01.2018

Vortragstermine II

	Thema	Datum
12	HR mit Indifferenzen – schwache Stabilität	24.01.2018
13	HR mit Indifferenzen – starke & Super-Stabilität	24.01.2018
14	HR mit Paaren	24.01.2018
15	HR mit Quoten	24.01.2018
16	Das Projekt-Zuweisungs-Problem	24.01.2018
17	Das Arbeiter-Firmen-Problem	24.01.2018
18	SR – stabile Partitionierungen	31.01.2018
19	SR – fast-stabile Zuweisungen	31.01.2018
20	Hedonische Spiele – Kernstabilität	31.01.2018
21	Hedonische Spiele – Pareto-Optimalität	31.01.2018

Literatur

F. Brandt, V. Conitzer, U. Endriss, J. Lang und A. Procaccia, Editoren.
Handbook of Computational Social Choice.
Cambridge University Press, 2016.

D. Gusfield und R. Irving
The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms.
MIT Press, 1989.

D. Knuth.
Stable Marriage and its Relation to Other Combinatorial Problems.
volume 10 of CRM Proceedings and Lecture Notes, American Mathematical Society, 1997. Original: Mariages Stables, Les Presses de L' Université de446 Montreal, 1976.

D. Manlove
Algorithmics Of Matching Under Preferences.
Volume 2 of Theoretical computer science. World Scientific Publishing, 2013.

. . . und jede Menge Referenzen darin.

Ausblick

nächste Schritte

1. Thema auswählen bis Dienstag,
2. zugehörige Aufgabenstellung per E-Mail erhalten,
3. bei Unklarheiten zeitnah nachfragen,
4. beginnen!