Thomas Kesselheim 23. November 2017
Abgabe: in der Vorlesung am 28. November 2017

Algorithmen und Unsicherheit

Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 7

Die Lösungen zu diesem Übungsblatt müssen bereits in der Vorlesung am Dienstag, den 28. November abgegeben werden.

Aufgabe 1: (5 Punkte)
Wir betrachten die folgende Hypergraph-Variante von bipartitem Online-Matching. Die Menge der Offline-Knoten ist wieder vorab bekannt, die Menge der Online-Knoten wird nach und nach aufgedeckt. Wenn ein Online-Knoten aufgedeckt wird, erfahren wir, welche ausgehenden Kanten er hat und wie deren Gewichte sind. Im Gegensatz zum klassischen Matching deckt jede Kante aber nun *zwei* Offline-Knoten ab.
Zeige, dass der Greedy-Algorithmus aus der 1. Vorlesung $\frac{1}{3}$-competitive ist für die ungewichtete Version.

Aufgabe 2: (2+5+3 Punkte)
Wieder betrachten wir die oben genannte Hypergraph-Variante von bipartitem Online-Matching, nun aber in der gewichteten Version. Zeige, dass der Algorithmus aus der 7. Vorlesung $\frac{1}{4}$-competitive ist für die gewichtete Version mit zufälliger Ankunftsreihenfolge und geeigneter Wahl von τ und $n \to \infty$.

(a) Zeige, dass das erwartete Gewicht der vorläufig ausgewählten Kanten in Schritt t weiterhin $\frac{1}{n} w(\mathrm{OPT}(G))$ ist.

(b) Zeige, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die vorläufig ausgewählte Kante in Schritt t hinzugefügt werden kann, mindestens $\frac{(\tau-1)\tau}{(t-2)(t-1)}$ ist.

(c) Nutze Aufgabenteile (a) und (b) sowie $\sum_{t=\tau+1}^{n} \frac{1}{(t-2)(t-1)} \geq \int_{\tau+1}^{n} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$, um den Beweis abzuschließen.

Hinweis: Die Aufgabtenteile sind unabhängig von einander lösbar.

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Zeige, dass für keinen deterministischen vergleichsbasierten Algorithmus beim Secretary Problem gibt, so dass gilt:

$$\mathbf{E}[v(\mathrm{ALG}(v_1, \ldots, v_n)] \geq c \cdot \max_i v_i \qquad \text{für alle } v_1, \ldots, v_n \geq 0, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $c < \frac{1}{\mathrm{e}}$.
Hinweis: In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass für jedes n und jede Wahl von $v_1 > \ldots > v_n$ kein deterministischer Algorithmus die beste Kandidatin mit Wahrscheinlichkeit höher als $\max_{\tau \in \{0,1,\ldots,n\}} \sum_{t=\tau+1}^{n} \frac{1}{n} \frac{\tau}{t-1}$ auswählt. Führe dies mit einem Algorithmus, der obige Bedingung erfüllt zu einem Widerspruch.