Thomas Kesselheim

16. November 2017
Abgabe: in der Vorlesung am 23. November 2017

Algorithmen und Unsicherheit

Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Wir wollen zeigen, dass es bei Online-Algorithmen nicht notwendig ist zu randomisieren, wenn die Eingabe aus einer bekannten Verteilung gezogen wird.
Wir nutzen die Notation aus Vorlesung 5. Seien X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathcal{X}$ und A eine *unabhängige* Zufallsvariable mit Werten in $\mathcal{A}$. Zeige, dass es ein $a \in \mathcal{A}$ gibt mit $\mathbf{E}[c(a, X) \leq \mathbf{E}[c(A, X)]$.

Hinweis: Der Beweis kann mit den gleichen Techniken geführt werden wie der von Yao's Principle.

Aufgabe 2: (3+3+3+3 Punkte)

Wir ziehen uniform zufällig eine Permutation $\pi\colon [n] \to [n]$. Dies bedeutet nichts anderes als n-mal aus einer Urne ohne Zurücklegen zu ziehen, beispielsweise um $\pi(1)$, $\pi(2)$, und so weiter in dieser Reihenfolge zu bestimmen. Manchmal kann es aber auch hilfreich sein, die gedankliche Reihenfolge anders zu wählen.

(a) Für $k \leq n$, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\pi(1) = 1, \pi(2) = 2, \ldots, \pi(k) = k$?

(b) Für $M \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $|M| = k$, sei $\mathcal{E}_M$ das Ereignis, dass $\pi(1) \in M, \pi(2) \in M, \ldots, \pi(k) \in M$. Wie groß ist $\mathbf{Pr}[\mathcal{E}_M]$?

(c) Sei $i \in M$. Wie groß ist $\mathbf{Pr}[\pi(k) = i \mid \mathcal{E}_M]$?

(d) Zeige mit Aufgabenteil (c), dass für jedes festes k gilt: $\mathbf{Pr}[\pi(1) = \max_{j \leq k} \pi(j)] = \frac{1}{k}$.

Hinweis: Die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbf{Pr}[A \mid B]$ ist definiert durch $\mathbf{Pr}[A \cap B]/\mathbf{Pr}[B]$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

In der Vorlesung wurde haben wir gezeigt, dass wir beim *Secretary Problem* garantieren können, dass $\mathbf{E}[v(\mathrm{ALG}(\sigma))] \geq \frac{1}{e} v(\mathrm{OPT}(\sigma))$ gilt.
Betrachte nun den Fall, dass die Kandidatinnen Kosten anstatt Werte haben und wir wollen eine Kandidatin mit möglichst niedrigen Kosten einstellen. Wir müssen auch auf jeden Fall eine Kandidatin einstellen. Zeige, dass es keinen Algorithmus gibt, bei dem für endliches α gilt, dass $\mathbf{E}[c(\mathrm{ALG}(\sigma))] \leq \alpha c(\mathrm{OPT}(\sigma))$.

Hinweis: Es reicht den Fall $n = 2$ zu betrachten.