Thomas Kesselheim 26. Oktober 2017
Abgabe: in der Vorlesung am 2. November 2017

Algorithmen und Unsicherheit

Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 3

Aufgabe 1: (2+2+2+2 Punkte)
Betrachte folgende Set-Cover-Instanz: $U = \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{S} = \{A, B, C\}$ mit $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3\}$, $c_A = c_B = 3$, $c_c = 4$.

(a) Gib eine optimale ganzzahlige Lösung an.

(b) Gib eine fraktionale primale Lösung von Kosten höchsten 5 an

(c) Gib eine duale Lösung von Wert mindestens 5 an.

(d) Nutze die Lösung aus (c), um zu zeigen, dass deine Lösung von (b) optimal ist, indem du die Nebenbedingungsungleichungen passend addierst. (Die Lösung soll im Sinne des Lemmas über schwache Dualität sein, aber nicht auf dieses Lemma als solches zurückgreifen.)

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Wir betrachten die ungewichtete Version von Set Cover, d.h. $c_S = 1$ für alle $S \in \mathcal{S}$. Sei $f = \max_{e \in U} |\{S \in \mathcal{S} \mid e \in S\}|$ die *Frequenz* des Mengensystems. Zeige, dass ein Online-Algorithmus, der jedes auftretende Element irgendwie abdeckt, f-competitive ist.
Dies kann entweder direkt argumentiert werden oder mit Lemma 3.3, wobei $\alpha = 1$ und $\beta = f$.

Aufgabe 3: (4+4 Punkte)
In dieser Aufgabe sollen untere Schranken von die Competive Ratio bei Online Set Cover hergeleitet werden. Nutze hierfür die perspektive eines Gegners aus der zweiten Vorlesung. Betrachte hierfür eine Sequenz von Elementen, so dass das erste Element von allen Mengen abgedeckt werden kann $(1, \ldots, n)$, das zweite von der Hälfte $(1, \ldots, n/2$ oder $n/2{+}1, \ldots, n$, je nach bisheriger Entscheidung), das dritte von einem Viertel (z. B. $1, \ldots, n/4$) und so weiter. In jeder dieser Konstruktionen hat das Offline-Optimum Kosten von 1.

(a) Zeige, dass für (ganzzahliges) Online Set Cover kein deterministischer Algorithmus strictly c-competitive ist mit $c < \log_2 n$.

(b) Zeige, dass für fraktionales Online Set Cover kein deterministischer Algorithmus strictly c-competitive ist mit $c = o(\log n)$.

Tipp: Nutze für die Argumentation, dass eine der Seiten in jedem Schritt bislang höchstens zur Hälfte abgedeckt ist.