Thomas Kesselheim

9. November 2017
Abgabe: in der Vorlesung am 16. November 2017

Algorithmen und Unsicherheit

Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Zeige, dass die Annahme, dass der Algorithmus für Online Set Cover *lazy* ist, tatsächlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist.

Betrachte einen beliebigen Online-Algorithmus ALG, der auch Mengen auswählt, wenn dies nicht unbedingt erforderlich ist, und konstruiere hieraus einen Algorithmus ALG$'$, der jeweils nur eine Menge auswählt und nur wenn dies erforderlich ist, so dass gilt: $\text{cost}(\text{ALG}'(\sigma)) \leq \text{cost}(\text{ALG}(\sigma))$.

Hinweis: Lasse ALG im Hintergrund laufen, wähle aber nicht alle Mengen, die er auswählt. Für die Analyse, vergleiche die beiden Laufe der Algorithmen.

Aufgabe 2: (3+4 Punkte)

Wir betrachten die ungewichtete Version von Set Cover, d.h. $c_S = 1$ für alle $S \in \mathcal{S}$.

(a) Zeige, dass ein Online-Algorithmus, der für jedes Element höchstens eine Menge auswählt $\max_{S \in \mathcal{S}} |S|$-competitive ist. Nutze hierzu Lemma 3.3 und setze $y_e^{(t)} = 1$, wenn im aktuellen Schritt eine Menge ausgewählt wird. Zeige $\alpha = 1$, $\beta = \max_{S \in \mathcal{S}} |S|$.

(b) Nun betrachten wir den Algorithmus, der sobald ein Element abgedeckt werden muss, alle Mengen auswählt, die dieses Element abdecken. Zeige, dass dieser Algorithmus f-competitive ist, wobei $f = \max_{e \in U} |\{S \in \mathcal{S} \mid e \in S\}|$ die *Frequenz* des Mengensystems ist. Dies kann entweder direkt oder über Lemma 3.3 argumentiert werden.

Aufgabe 3 auf der nächsten Seite.

Aufgabe 3: (2+6 Punkte)

Betrachte das folgende Online-Problem: Wir wollen ein Haus kaufen. Jeweils wenn wir ein Haus angeschaut haben erfahren wir, wie gut es ist. Sofort nach der Besichtigung müssen wir entscheiden, ob wir das aktuelle Haus kaufen oder nicht. Wenn wir es nicht sofort kaufen, haben wir später nicht mehr die Möglichkeit dazu.

Formal wird also eine Sequenz von Werten wird nach und nach aufgedeckt. Der Algorithmus kann jeweils entscheiden, ob er die Sequenz beim aktuellen Wert stoppt oder ob er abwartet. Wir sagen, dass ein Algorithmus gewinnt, falls er beim größten Wert der Sequenz stoppt.

(a) Nimm an, dass die Länge der Sequenz n bekannt ist. Gib einen randomisierten Online-Algorithmus an, der mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ gewinnt.

Hinweis: Trivial.

(b) Zeige mit Yao's Principle, dass es keinen Algorithmus gibt, der mit höherer Wahrscheinlichkeit gewinnt.

Hinweis: Nutze die Profitmaximierungsvariante von Yao's Principle, wobei der Profit 1 ist, wenn der Algorithmus gewinnt, 0 sonst. Das Offline-Optimum ist selbstverständlich immer 1. Konstruiere eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über Sequenzen der Form $1, 2, \ldots, t, 0, \ldots, 0$.