Thomas Kesselheim 11. Januar 2018
Abgabe: in der Vorlesung am 18. Januar 2018

Algorithmen und Unsicherheit

Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 10

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Zeige, dass sich stochastisches Set Cover auch auf deterministisches Set Cover reduzieren lässt. Dafür muss eine andere Menge von Elementen U', Familie von Teilmengen $\mathcal{S}'$ sowie Kosten $(w'_{S'})_{S' \in \mathcal{S}'}$ geeignet definiert werden. Eine Lösung dieser Set-Cover-Instanz entsprechen dann jeweils einer Policy mit denselben Kosten.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Wir betrachten den Boosted-Sampling-Algorithmus für stochastischen Steiner-Baum wie in der Vorlesung. Allerdings nutzen wir ℓ Mengen $S_1, \ldots, S_\ell$ in der ersten Phase. Zeige, dass die Approximationsgarantie $\max\{2(1 + \frac{\lambda}{\ell+1}), 2(\ell + \lambda)\}$ ist. Es reicht, wenn du die unterschiede zur bisherigen Analyse angibst.

Aufgabe 3: (4+4 Punkte)
Wir betrachten das Minimum Multiway Cut Problem auf Bäumen. Gegeben ist ein Baum $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $(w_e)_{e \in E}$. Weiterhin gegeben sind k Paare $(s_i, t_i) \in V \times V$. Es muss nun eine Menge $S \subseteq E$ gefunden werden, so dass für alle i gilt, dass s_i und t_i in $(V, E \setminus S)$ nicht verbunden sind.
Ein bekannter Approximationsalgorithmus für dieses Problem nutzt folgende lineare Programm. Sei P_i der (eindeutige) Pfad von s_i nach t_i.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e & \\ \text{subject to} \quad & \sum_{e \in P_i} x_e \geq 1 & \text{für } i = 1, \ldots, k \\ & x_e \geq 0 & \text{für alle } e \in E \end{aligned}$$

Der Algorithmus liefert eine Lösung mit Kosten $2 \sum_{e \in E} w_e x^*_e$, wobei x^* eine optimale Lösung des obigen Programms ist.

(a) Formuliere eine LP-Relaxierung für die stochastische mehrstufige Variante, in der nur eine (zunächst unbekannte) Teilmenge $A \subseteq \{1, \ldots, k\}$ abgedeckt werden muss. In der ersten Phase können Kanten für Kosten $(w^{\mathrm{I}}_e)_{e \in E}$, in der zweiten Phase für $(w^{\mathrm{II}}_e)_{e \in E}$ eliminiert werden.

(b) Nutze eine optimale Lösung der LP-Relaxierung und den Approximationsalgorithmus für das deterministische Problem, um eine 4-Approximation der optimalen Policy zu berechnen.

Aufgabe 4 auf der nächsten Seite.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Wir betrachten stochastisches Vertex Cover aber nun mit drei Phasen. Die Kantenmenge wird wie folgt bestimmt: Zunächst ziehen wir eine Zahl $K \in \{1, \ldots, k\}$ aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung $(p_i)_{i \in \{1,\ldots,k\}}$. Anschließend ziehen wir die Menge E aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung $(q_E^K)_E$. In der ersten Phase ist E vollkommen unbekannt, in der zweiten Phase ist K bekannt, in der dritten Phasen E. Knoten können hinzugefügt werden zu Kosten $(w_v^{\mathrm{I}})_{v \in V}$, $(w_v^{\mathrm{II}})_{v \in V}$, bzw. $(w_v^{\mathrm{III}})_{v \in V}$.

Formuliere eine LP-Relaxierung wie in der Vorlesung und gib mit Hilfe einer optimalen Lösung eine 6-Approximation für die optimale Policy an.