Thomas Kesselheim 30. November 2017
Abgabe: in der Vorlesung am 19. Dezember 2017

Algorithmen und Unsicherheit

Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 8

Aufgabe 1: (5 Punkte)
Wir betrachten die Verallgemeinerung des Algorithmus *Weighted Majority* für Klassifikatoren mit k möglichen Klassen. (Der Fall aus der Vorlesung, binäre Klassifikation, entspricht $k = 2$.) In jedem Schritt wählt der Algorithmus wiederum eine Klasse aus, die von den meisten Klassifikatoren vorgeschlagen wird (also eine relative Mehrheit hat).
Zeige, dass dieser Algorithmus höchstens $(k + \eta) \min_i m_i + 2 \ln n/\eta$ viele Fehler macht, wobei m_i die Anzahl der Fehler von Klassifikator i sind.

Aufgabe 2: (5 Punkte)
Zeige, dass ein No-Regret-Algorithmus randomisiert sein muss. Betrachte dafür den Fall $n = 2$ und konstruiere für jeden deterministischen Algorithmus eine Sequenz, so dass $L_{\text{Alg}}^{(T)} = T$ und $\min_i L_i^{(T)} \leq \frac{T}{2}$.

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Zeit mit Hilfe von Yao's Principle, dass es für jeden (randomisierten) Algorithmus eine Sequenz $\ell^{(1)}, \ldots, \ell^{(T)}$ gibt, so dass $L_{\text{Alg}}^{(T)} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) T$, jedoch $\sum_{t=1}^{T} \min_i \ell_i^{(t)} = 0$. Dies zeigt, dass die Reihenfolge von Summe und Maximum in der Regret-Definition sehr wichtig ist.

Aufgabe 4: (5 Punkte)
Betrachte die Modifikation von Randomized Weighted Majority, so dass $w_i^{(t+1)} = w_i^{(t)} \cdot (1 - \ell_i^{(t)} \eta)$. Zeige, dass Theorem 8.3 analog gilt.

Aufgabe 5: (5 Punkte)
Gib einen No-Regret-Algorithmus an für den Fall, dass $\ell_i^{(t)} \in [-\rho, \rho]$ für alle i and t. Gib auch eine Abschätzung für den Regret an. Du solltest die Algorithmen und Ergebnisse aus der Vorlesung wiederverwenden.

Aufgabe 6: (5 Punkte)
Wir betrachten eine andere Form von Feedback. Nach Schritt t erfährt der Algorithmus nicht $\ell_i^{(t)}$ für alle i sondern eine verrauschte Version. Genauer gesagt, legt zunächst ein Gegner die Sequenz $\ell^{(1)}, \ldots, \ell^{(T)}$ fest, wobei alle Kosten in $[0, 1]$ liegen. Anschließend wird hieraus $\bar{\ell}^{(1)}, \ldots, \bar{\ell}^{(T)}$ berechnet, wobei $\bar{\ell}_i^{(t)} = \ell_i^{(t)} + \nu_i^{(t)}$ und $\nu_i^{(t)}$ ist eine unabhängige Zufallsvariable auf $[-\epsilon, \epsilon]$ mit $\mathbf{E}[\nu_i^{(t)}] = 0$.
Gib einen No-Regret-Algorithmus sowie eine Abschätzung für den Regret an. Nutze dabei Aufgabe 5 und orientiere dich an Vorlesung 9.